

Otto Praxl

Kreisformeln

Praxelius-Formelsammlung

Grundlagen.

Herleitung der Formeln.

Praktische Anwendungen.

Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkungen	9
1.1. Geometrie des Kreises	9
1.2. Lage von Schwerpunkten	9
1.3. Die Kreiszahl π	10
1.3.1. Geometrische Ermittlung von π	10
1.3.2. Mathematische Berechnung von π	10
1.4. Einheiten für das Winkelmaß	11
1.4.1. Winkel in Altgrad (Grad, Minuten und Sekunden).....	11
1.4.2. Winkel in Neugrad (Gon).....	12
1.4.3. Winkel im Bogenmaß (Radian)	12
1.4.4. Ausgezeichnete Winkel.....	13
1.5. Arkusfunktionen	13
1.5.1. Arkusfunktion für Gradangaben	13
1.5.2. Arkusfunktionen für trigonometrische Funktionen	13
1.5.3. Wichtiger Hinweis für Umkehrfunktionen	14
2. Sätze am Kreis	15
2.1. Definitionen und Begriffe	15
2.1.1. Geometrischer Ort	15
2.1.2. Definition des Kreises.	15
2.1.3. Radius und Durchmesser	15
2.1.4. Zentriwinkel, Kreisbogen, Umfang	15
2.1.5. Sehne, Sekante und Tangente.....	16
2.2. Satz über die Peripheriewinkel	16
2.3. Der Satz von Thales	17
2.4. Der Sehnensatz und seine Anwendung	17
2.4.1. Der Sehnensatz.....	17
2.4.2. Beweis des Sehnensatzes	17
2.4.3. Potenz des Sehnenschnittpunktes	18
2.4.4. Anwendung des Sehnensatzes	18
2.4.5. Abstand der Sehne vom Mittelpunkt.....	19
2.4.6. Länge der Sehne.....	19
2.5. Sekantensatz und Sekantentangentensatz	19
2.5.1. Der Sekantensatz.....	19
2.5.2. Beweis des Sekantensatzes	20
2.5.3. Potenz des Sekantenschnittpunktes	20
2.5.4. Der Sekantentangentensatz.....	20
2.5.5. Praktische Anwendungen des Sekantentangentensatzes.....	21
2.5.5.1. Erdkrümmung und geometrische Sichtweite	21
2.5.5.2. Näherungsformel für die Sichtweite.....	22
2.5.5.3. Zusammengesetzte Sichtweiten	22
2.6. Das Sehnenviereck des Kreises	23
2.6.1. Beweis des Satzes über das Sehnenviereck	23
2.6.1.1. Beweis über die Zentriwinkel.....	23
2.6.1.2. Beweis über die Peripheriewinkel.....	24
2.6.2. Umfang des Sehnenvierecks.....	24
2.6.3. Fläche des Sehnenvierecks aus den vier Seitenlängen	24
2.6.4. Herleitung der Formel	24
2.6.5. Beliebiges Viereck im Vergleich zum Sehnenviereck im Kreis	26
2.6.6. Fläche aus dem Radius und den vier Zentriwinkeln	26

2.6.7.	<i>Seitenlängen aus dem Radius und den vier Zentriwinkeln</i>	27
2.6.8.	<i>Eckwinkel des Sehnenvierecks aus den Seitenlängen</i>	27
2.6.9.	<i>Diagonalenlängen aus den Seitenlängen</i>	28
2.6.10.	<i>Umkreisradius des Sehnenvierecks aus den vier Seitenlängen</i>	29
2.6.10.1.	<i>Umkreisradius eines beliebigen Dreiecks</i>	29
2.6.10.2.	<i>Umkreisradius des Sehnenvierecks</i>	30
2.6.11.	<i>Fläche aus den Diagonalen und ihrem Kreuzungswinkel</i>	31
2.6.12.	<i>Kreuzungswinkel der Diagonalen im Sehnenviereck</i>	31
2.6.13.	<i>Diagonalen als Sehnen</i>	32
2.6.14.	<i>Der Satz von Ptolemäus für das Sehnenviereck</i>	32
2.6.14.1.	<i>Herleitung der Formel</i>	32
2.6.15.	<i>Schwerpunktlage im (Sehnen-)Viereck</i>	32
2.6.15.1.	<i>Zeichnerische Ermittlung der Schwerpunktlage</i>	32
2.6.15.2.	<i>Rechnerische Ermittlung der Schwerpunktlage</i>	33
2.7.	Das Tangentenviereck des Kreises	33
2.7.1.	<i>Beweis des Satzes über das Tangentenviereck</i>	34
2.7.2.	<i>Der Umfang des Tangentenvierecks</i>	34
2.7.3.	<i>Fläche des Tangentenvierecks</i>	34
2.7.4.	<i>Inkreisradius des Tangentenvierecks</i>	35
2.7.5.	<i>Schwerpunktlage im Tangentenviereck</i>	35
3.	Berechnungen am Kreis	35
3.1.	Umfang des Vollkreises	35
3.2.	Fläche des Vollkreises	35
3.3.	Kreisbogen	36
3.3.1.	<i>Die Länge des Kreisbogens</i>	36
3.3.2.	<i>Winkel des Kreisbogens</i>	36
3.3.3.	<i>Länge der Sehne</i>	36
3.3.4.	<i>Schwerpunktlage des Kreisbogens</i>	36
3.3.5.	<i>Formel für die Lage des Schwerpunkts des Kreisbogens</i>	37
3.4.	Kreis Sektor (Kreisausschnitt)	38
3.4.1.	<i>Definition des Kreissectors</i>	38
3.4.2.	<i>Fläche des Kreissectors</i>	38
3.4.3.	<i>Schwerpunktlage der Kreissectorfläche</i>	38
3.4.4.	<i>Formel für die Lage des Schwerpunkts im Kreissector</i>	38
3.5.	Kreissegment (Kreisabschnitt)	39
3.5.1.	<i>Bezeichnungen</i>	39
3.5.2.	<i>Definition</i>	40
3.5.3.	<i>Kreissegmentberechnung aus Zentriwinkel und Radius</i>	40
3.5.3.1.	<i>Kreissectorfläche A_1</i>	40
3.5.3.2.	<i>Sehnenlänge s des Kreissegments</i>	40
3.5.3.3.	<i>Stichhöhe h des Kreissegments</i>	40
3.5.3.4.	<i>Dreiecksfläche A_2 zwischen Sehne und dem Mittelpunkt</i>	40
3.5.3.5.	<i>Kreissegmentfläche A</i>	41
3.5.3.6.	<i>Gültigkeitsbereich der Formeln</i>	41
3.5.4.	<i>Kreissegmentberechnung aus Sehnenlänge und Stichhöhe</i>	41
3.5.4.1.	<i>Zentriwinkel</i>	42
3.5.4.2.	<i>Radius</i>	42
3.5.4.3.	<i>Tabellenwerte für das Kreissegment</i>	43
3.5.4.4.	<i>Formeln für die Parameterwerte</i>	43
3.5.4.5.	<i>Programmierung der Tabelle</i>	44
3.5.4.6.	<i>Taschenrechnerprogramm</i>	45
3.5.5.	<i>Schwerpunktlage bei der Kreissegmentfläche</i>	45
3.5.5.1.	<i>Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkt</i>	45

3.5.5.2.	<i>Abstand des Schwerpunkts von der Sehne</i>	46
3.5.6.	<i>Schwerpunktlage aus Sehne, Stichhöhe und Flächenkoeffizient</i>	46
3.5.6.1.	<i>Abstand des Schwerpunkts vom Kreismittelpunkt</i>	46
3.5.6.2.	<i>Abstand des Schwerpunkts von der Sehne</i>	46
3.6.	Halbkreis	47
3.6.1.	<i>Fläche des Halbkreises</i>	47
3.6.2.	<i>Umfang des Halbkreises</i>	47
3.6.3.	<i>Schwerpunktlage des Halbkreisbogens</i>	47
3.6.4.	<i>Schwerpunktlage der Halbkreisfläche</i>	47
3.6.4.1.	<i>Herleitung der Formel aus Kreissektor</i>	48
3.6.4.2.	<i>Herleitung der Formel aus Kreissegment</i>	48
3.6.4.3.	<i>Herleitung der Formel aus Kugelvolumen und Halbkreisfläche</i>	48
3.7.	Kreisring und Kreisringausschnitt	49
3.7.1.	<i>Kreisring</i>	49
3.7.1.1.	<i>Definition des Kreisrings</i>	49
3.7.1.2.	<i>Mittlerer Radius r_m des Kreisrings</i>	49
3.7.1.3.	<i>Umfang U des Kreisrings</i>	49
3.7.1.4.	<i>Breite B des Kreisrings</i>	49
3.7.1.5.	<i>Fläche A des Kreisrings</i>	50
3.7.2.	<i>Kreisringausschnitt (Kreisringsektor)</i>	50
3.7.2.1.	<i>Länge b des Kreisringausschnitts</i>	50
3.7.2.2.	<i>Fläche A_b des Kreisringausschnitts</i>	50
3.8.	Kreiszone und Kreiskeil	50
3.8.1.	<i>Kreiszone</i>	50
3.8.2.	<i>Kreiskeil</i>	51
4.	Zwei Kreise	52
4.1.	Fallunterscheidungen	52
4.2.	Schnitt zweier Kreise	53
4.2.1.	<i>Winkel, Sehne und Höhen</i>	53
4.2.1.1.	<i>Winkel</i>	53
4.2.1.2.	<i>Länge der gemeinsamen Sehne</i>	54
4.2.1.3.	<i>Stichhöhen der Segmente</i>	54
4.3.	Durchschnitt zweier Kreise	54
4.3.1.	<i>Segmentflächen</i>	54
4.3.2.	<i>Bedeckung bei astronomischen Ereignissen</i>	55
4.4.	Tangenten an zwei sich nicht berührende Kreise	55
4.4.1.	<i>Äußere Tangenten</i>	55
4.4.1.1.	<i>Technische Anwendung: Gerader Riemenantrieb</i>	56
4.4.2.	<i>Innere Tangenten</i>	56
4.4.2.1.	<i>Technische Anwendung: Gekreuzter Riementrieb</i>	57
5.	Quadratur des Kreises	57
5.1.	Geometrische Lösung unmöglich	57
5.2.	Mathematische Lösung	57
5.2.1.	<i>Flächengleichheit von Kreis und Quadrat</i>	57
5.2.2.	<i>Überdeckung des Kreises mit flächengleichem Quadrat</i>	58
5.2.2.1.	<i>Sehnenlänge und Stichhöhe</i>	58
5.2.2.2.	<i>Verhältnis der Sehnenlänge zur Quadratseite</i>	58
5.2.2.3.	<i>Winkel</i>	58
5.2.2.4.	<i>Segmentfläche</i>	59
6.	Kreisgleichungen der analytischen Geometrie	59
6.1.	Der Kreis im rechtwinkligen Koordinatensystem	60

6.1.1.	<i>Allgemeines zum rechtwinkligen Koordinatensystem</i>	60
6.1.1.1.	<i>Abstand zweier Punkte</i>	60
6.1.1.2.	<i>Kreisgleichungen</i>	60
6.1.1.3.	<i>Gültigkeitsbereich der Kreisgleichungen</i>	60
6.1.1.4.	<i>Es gibt immer zwei Lösungen</i>	60
6.1.2.	<i>Die Mittelpunktsgleichung des Kreises</i>	61
6.1.3.	<i>Die allgemeine Kreisgleichung</i>	61
6.1.4.	<i>Die Scheitelgleichung des Kreises</i>	61
6.1.5.	<i>Die Parametergleichung</i>	62
6.1.5.1.	<i>Berechnung von Kreiskleinpunkten von der Tangente aus</i>	62
6.1.5.2.	<i>Näherungsformel</i>	63
6.1.5.3.	<i>Beispiel</i>	63
6.2.	Der Kreis im Polarkoordinatensystem	64
6.2.1.	<i>Allgemeines zu Polarkoordinaten</i>	64
6.2.2.	<i>Übergang von Polarkoordinaten zu kartesischen Koordinaten</i>	64
6.3.	Kreisgleichungen im Polarkoordinatensystem	65
6.3.1.	<i>Pol im Mittelpunkt des Kreises</i>	65
6.3.2.	<i>Pol in beliebiger Lage</i>	65
6.3.3.	<i>Polarachse geht durch den Mittelpunkt des Kreises</i>	65
6.3.4.	<i>Pol auf der Kreislinie</i>	66
6.4.	Kreis durch drei gegebene Punkte	67
6.4.1.	<i>Bezeichnungen</i>	67
6.4.2.	<i>Herleitung der Vektorgleichungen</i>	67
6.4.3.	<i>Determinantendarstellung des Kreises aus drei Punkten</i>	68
6.4.4.	<i>Beispiel der Kreisberechnung aus drei Punkten</i>	69
7.	Hilfsmittel zum Zeichnen von Kreisen	70
7.1.	Der Zirkel	70
7.2.	Schnur und Latte als Zirkelersatz	70
7.3.	Kreis- und Bogenschablonen	71
7.4.	Zeichnen von Kreisen in der Werkstatt	71
7.4.1.	<i>Zeichnen eines Kreises durch zwei gegebene Punkte</i>	72
7.4.1.1.	<i>Vorgang</i>	72
7.4.1.2.	<i>Abmaß</i>	72
7.4.2.	<i>Zeichnen eines Kreises durch drei gegebene Punkte</i>	72
7.4.2.1.	<i>Vorgang</i>	73
7.4.2.2.	<i>Abmaß</i>	73
7.4.2.3.	<i>Theoretische Grundlage des Verfahrens</i>	73
8.	Literatur	74
9.	Kreissegment-Tabelle	75
10.	Sachwortverzeichnis (Index)	80