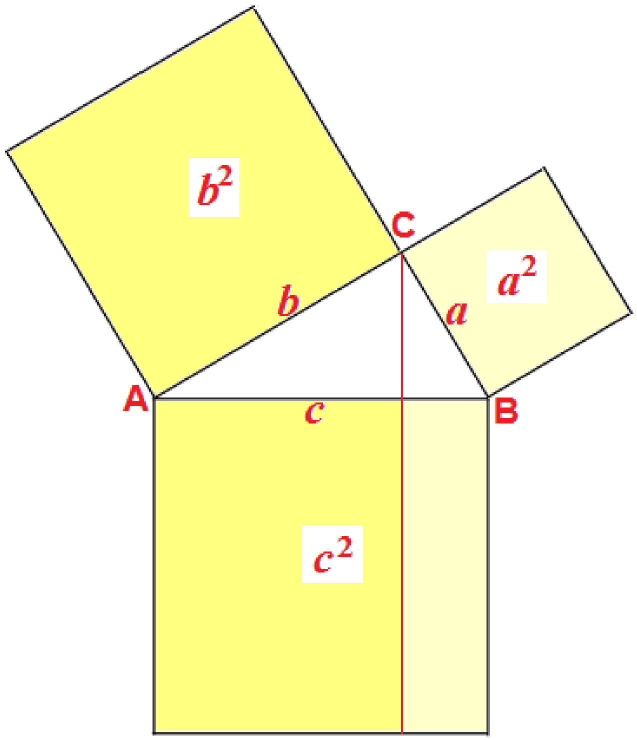
Otto Praxl

Dreiecke berechnen

Formelsammlung für die Berechnung der Dreiecke in der Ebene.
Grundlagen und Herleitungen der Formeln.
Mit Programmen für wissenschaftliche HP-Taschenrechner



Impressum

Verfasser: *Otto Praxl*

Titel des Buches: *Dreiecke berechnen*
Dateiname: *Dreiecke.pdf*
Internetseite: www.praxelius.de

Veröffentlichung:

Diese Ausgabe wird als geschütztes PDF-Dokument auf der Internetseite des Verfassers zum Herunterladen angeboten.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007):

Otto Praxl

Bildnachweise:

Alle Bilder stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 10.08.2013
Bearbeitungskennzeichen: Dr-56850-019

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zum Gebrauch der Formelsammlung

Die **Farbgestaltung** in Text, Bildern und Formeln ist ein wesentliches Element zur Erzielung und Erhaltung der Übersichtlichkeit. Deshalb sollte zum Lesen des Dokuments ein PDF-Reader und ein Farbbildschirm zur Verfügung stehen.

Das **Ausdrucken** auf Papier sollte mit einem Farbdrucker erfolgen. Zweckmäßig sind Ausdrucke entweder doppelseitig auf A4-Blättern oder als Broschürendruck in A5 auf A4-Blättern (4 Seiten A5 = 1 Blatt A4), wobei Lagen von 20 Seiten (= 5 Blätter A4) jeweils als separate Broschüre gedruckt werden (Seiten 1 bis 20, 21 bis 40). Hinweise zum Ausdrucken und Binden des Buches finden Sie auf der Internetseite des Verfassers unter „Bücher selber binden".

Zur Erleichterung beim Lesen sind **Querverweise** im Text angebracht und auch die Inhalte der Verzeichnisse sind mit Links versehen, mit denen im PDF-Reader die Verweisziele direkt erreicht werden können. Aber auch im gedruckten Buch können die gesuchten Stellen manuell leicht gefunden werden, da bei den Querverweisen meist die Seitenzahlen angegeben wurden. Ebenso sind die Seitenzahlen für Formeln, Bilder und Begriffe in den Verzeichnissen zu finden.

1. Vorwort

In der täglichen Praxis brauchen die Anwender, vom Schüler bis zum Wissenschaftler, nicht nur die Dreieckformeln allein, sondern auch die mathematischen Grundlagen dazu, die sie meist außerhalb der Formelsammlung in Lehrbüchern nachschlagen müssen.

Hier in dieser Formelsammlung werden nicht nur die Dreieckformeln angegeben und hergeleitet, sondern auch die Begriffe, Definitionen und die praktischen Anwendungen ausführlich erläutert.

Voraussetzung zum Verständnis ist ein gutes mathematisches Schulwissen des Lesers. Vor allem ist die Kenntnis der Trigonometrie mit ihren Winkelfunktionen erforderlich. Die mathematischen Erläuterungen zur Herleitung der Formeln sollen dem Leser die Möglichkeit bieten, Einblicke in die Methoden zu erwerben, um fehlende Formeln später selbst herleiten zu können. Durch Beispiele soll die Anwendung der abstrakten Formeln in der Praxis gezeigt werden.

Besonderer Wert wurde auf eine übersichtliche Gliederung mit Inhaltsverzeichnis, Bilderverzeichnis, Formelverzeichnis und auf ein detailliertes Sachwortverzeichnis mit den verwendeten Begriffen und Stichwörtern gelegt.

Unterschleißheim, im August 2013

Otto Praxl

2. Einleitung

Im Geometrieunterricht in den Schulen spielt die Berechnung von Dreiecken eine wichtige Rolle. Die Trigonometrie mit ihren Lehrsätzen baut auf Dreiecken auf. In der Landesvermessung werden Dreiecknetze (z. B. Deutsches Hauptdreiecknetz) mit trigonometrischen Festpunkten nach Verfahren der Triangulation als Grundlagen der amtlichen Vermessung aufgebaut.

Die Geometrie geht hauptsächlich auf die Griechen zurück.

Der griechische Mathematiker *Euklid*[1] lebte etwa 325 vor Chr. und wirkte in Alexandria. Er fasste das damalige Wissen über die Geometrie in seinen 13 Büchern zusammen, in dem die Elemente der Geometrie behandelt sind (Definitionen, Postulate, Axiome, Beweise). Er nannte sein Werk[2] „Die Elemente“ (Lit. [Euklid]). Das Werk ist die Grundlage der Euklidischen Geometrie[3] und ist nach der Bibel das am meisten verbreitete Buch der Erde (siehe Lit. [Kropp]).

Mit dem Dreieck haben sich schon Generationen von Mathematikern beschäftigt. Auch *Euklid* hat sich sehr ausführlich mit dem Dreieck beschäftigt und viele Lehrsätze darüber aufgestellt.

3. Winkeleinheiten

Der Vollständigkeit halber werden hier auch die Einheiten für das Winkelmaß angegeben.

3.1. Winkel in Altgrad (Grad, Minuten und Sekunden)

Die Winkelmaßeinheit Grad (°) wird auch als **Altgrad** bezeichnet, damit im Sprachgebrauch gegenüber der Maßeinheit **Neugrad** (siehe unten) eine eindeutige Unterscheidung möglich ist.

Der Gesamtwinkel einer vollen Umdrehung ist ein Vollkreis, der in 360° eingeteilt wird. Die Maßeinheit eines Winkels ist 1 Grad (°), also $^1/_{360}$ des Vollkreises. Der Halbkreis hat 180°. Der rechte Winkel ist ein Viertelkreis mit 90°.

1 Grad (°) hat 60 Minuten ('): 1° = 60'.
1 Minute (') hat 60 Sekunden (''): 1' = 60''
1° = 60' = 3600''.

Wenn Verwechslungsgefahr mit Zeitangaben besteht, werden anstelle von *Minuten* und *Sekunden* auch die Bezeichnungen *Winkelminuten* und *Winkelsekunden* oder *Bogenminuten* und *Bogensekunden* verwendet.

Gradangaben können auch mit dezimalen Bruchteilen als Dezimalzahl geschrieben werden, z. B.:

$$32°48'36'' = 32° + \left(\frac{48}{60}\right)° + \left(\frac{36}{3600}\right)° = 32{,}81°\,.$$

---

[1] nicht zu verwechseln mit dem Philosophen *Euklid aus Megara*, der etwa 400 vor Chr. lebte.

[2] "Die Elemente" von Euklid sind in deutscher Übersetzung in jeder guten wissenschaftlichen Buchhandlung erhältlich (z. B. als reprografische Nachdrucke von "Oswalds Klassikern der exakten Wissenschaften" oder nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt von Clemens Thaer).

[3] Sie beruht auf dem Parallelenaxiom: Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann nur eine Parallele zu dieser Geraden gezogen werden.

3.2. Winkel in Neugrad (Gon)

In der Vermessungspraxis muss sehr oft die Summe von Winkeln mit Winkelbruchteilen gebildet werden. Die Rechnung mit dem 60er-System von Grad, Minuten und Sekunden ist für die Addition von Winkeln unpraktisch. Auch die Umrechnung in dezimale Bruchteile eines Grads wäre umständlich. Deshalb wurde eine Maßeinheit eingeführt, bei der die Bruchteile des Kreises dezimal geteilt sind. Der rechte Winkel wird nicht in 90, sondern in 100 Teile geteilt. Diese Maßeinheit heißt **Neugrad** oder **Gon** (^{g}), Kurzbezeichnung **gon**. Die Skalen der Vermessungsgeräte (z. B. Theodolit, Tachymeter) haben Neugradteilung.

Der Vollkreis hat also 400^g oder 400 gon. 90° entsprechen 100^g = 100 gon. Die Bruchteile von 1 gon werden als Dezimalstellen hinter dem Komma angegeben. Deshalb wären auch keine Untereinheiten nötig.

Trotzdem wurden die *Neuminute* (^{c}) als $^1/_{100}$ gon = 0,01 gon und die *Neusekunde* (^{cc}) als $^1/_{100}{}^c = 0{,}01^c$ = 0,0001 gon definiert.

$1^g = 1\ \text{gon} = 100^c = 10000^{cc} = 0{,}9°$

Die hochgestellten Buchstaben $^{\mathbf{g}}$, $^{\mathbf{c}}$ und $^{\mathbf{cc}}$ sind in der Schreibweise sehr unpraktisch, deshalb werden sie in der Praxis kaum verwendet.

Winkelangaben in Neugrad werden als Kommazahl mit 4 Nachkommastellen geschrieben. Beispiel: $5^g\,33^c\,86^{cc}$, geschrieben als $5{,}3386^g$ = 5,3386 gon = 4,80474° = 4°48'17,064".

Bei Winkelangaben dürfen für die Bruchteile keine Vorsätze wie Dezi, Zenti oder Milli verwendet werden. Die Neuminute darf also nicht als Zenti-Gon (cgon) bezeichnet werden.

Auf den wissenschaftlichen HP-Taschenrechnern ist neben „Altgrad“ (DEG = degrees) und „Bogenmaß“ (RAD = Radians) auch das Winkelformat „Neugrad“ (GRD) verfügbar.

3.3. Winkel im Bogenmaß (Radiant)

Die Maßeinheit für das Bogenmaß ist Radiant, Kurzzeichen: **rad**.

Ein Radiant ist gleich dem ebenen Winkel, der als Zentriwinkel des Einheitskreises mit dem Radius ***r*** = 1 m aus dem Kreisumfang einen Bogen von 1 m Länge herausschneidet.

Der Kreisumfang des Vollkreises ist $\boldsymbol{2\pi r}$. Wird diese Bogenlänge zum Radius ***r*** des Kreises ins Verhältnis gesetzt, dann ergibt sich das Bogenmaß eines Vollkreises mit $\boldsymbol{2\pi}$.

Um bei Berechnungen darauf hinzuweisen, dass ein Winkelwert im Bogenmaß vorliegt (weil **rad** in der Berechnung nicht mitgeschleppt wird), sind die Variablennamen für das Bogenmaß mit einem Bogen über dem Formelzeichen gekennzeichnet.

Die Funktion **arcus**, abgekürzt **arc**, die zur Maßzahl eines Winkels $\boldsymbol{\alpha}$ im Bogenmaß[4] führt, ist also als das Verhältnis von Bogenlänge ***b*** eines Winkels zum Radius ***r*** des Kreises definiert:

Formel 1: Arkusfunktion (Bogenmaß)

$$\boxed{\mathbf{arc}\,\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\widehat{\alpha}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{r}}}.$$

<u>Umrechnung zwischen Altgrad und Radiant:</u>

Formel 2: Umrechnung Radiant in Altgrad

$$\boxed{\mathbf{1\,rad} = \mathbf{arc}\frac{360°}{2\pi} = \mathbf{arc}\frac{180°}{\pi} = \mathbf{arc\ 57{,}2957795131°}},$$

[4] ***Arcus*** kommt aus dem Lateinischen und heißt *Bogen*

gelesen als: 1 rad ist der Bogen mit einem Zentriwinkel von 57,2957795131°.

Formel 3: Umrechnung Altgrad in Radiant

$$\boxed{\mathbf{arc\ 1°} = \frac{2\pi}{360°}\,\mathbf{rad} = \frac{\pi}{180°}\,\mathbf{rad} = \mathbf{0{,}0174532925199\ rad}}$$

Beispiel:
Winkel in Grad: $\alpha = 30°$.
Die Maßzahl im Bogenmaß ergibt sich aus:

$$\mathbf{arc}\ 30° = \hat{\alpha} = 30° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{6}\,\mathbf{rad}\ .$$

Der Winkel von 30° wird als $\pi/6$ **rad** angegeben. Die Bezeichnung **rad** wird bei Berechnungen weggelassen:
sin $(\pi/6) = 0{,}5 =$ **sin** 30°.

Das Bogenmaß wird als mathematisches Winkelmaß verwendet. In mathematischen Berechnungen wird das Bogenmaß als Zahl ohne die Bezeichnung **rad** verwendet. Trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) und Winkelberechnungen in Computerprogrammen stützen sich in den meisten Programmiersprachen auf das Bogenmaß.

3.4. Ausgezeichnete Winkel

Manche Winkelwerte in Altgrad werden als „ausgezeichnete" Winkel bezeichnet, weil sie sich in bestimmten Konstruktionen als Sonderfall auszeichnen. Alle diese Winkel können mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, ohne einen Winkelmesser verwenden zu müssen.

Im Bogenmaß kommen nur ganzzahlige Teile von π **rad** als ausgezeichnete Winkel vor:

π **rad = 180°,**	als Zentriwinkel eines Halbkreises,
$^{\pi}/_{2}$ **rad = 90°,**	rechter Winkel, auch „Rechter" genannt, als Zentriwinkel des Viertelkreises,
$^{\pi}/_{3}$ **rad = 60°,**	als Winkelwerte im gleichseitigen Dreieck, $^{2}/_{3}$ eines rechten Winkels,
$^{\pi}/_{4}$ **rad = 45°,**	als Achtelkreis mit einem halben rechten Winkel,
$^{\pi}/_{6}$ **rad = 30°,**	als halber Winkel im gleichseitigen Dreieck, $^{1}/_{3}$ eines rechten Winkels.
$^{\pi}/_{10}$ **rad = 18°,**	
$^{\pi}/_{12}$ **rad = 15°.**	

15° und **18°** haben bei der arithmetischen Berechnung von Sinuswerten eine besondere Bedeutung.

In Neugrad gibt es als ausgezeichnete Winkel nur den Halbkreis mit **200 gon**, den Viertelkreis mit **100 gon** und den Achtelkreis mit **50 gon**.

3.5. Arkusfunktionen

Die Arkusfunktionen werden verwendet, um Gradangaben ins Bogenmaß umzurechnen.

3.5.1. Arkusfunktion für Gradangaben

Wie oben schon erwähnt, wird die Arkusfunktion **arc** α dazu verwendet, Gradangaben ins Bogenmaß umzurechnen. Die allgemeine Angabe des Arguments α in $\boxed{\mathbf{arc}\ \alpha = \hat{\alpha}}$ steht stellvertretend für Argumentwerte in Altgrad oder Neugrad. Im konkreten Fall wird die Winkeleinheit Altgrad oder Neugrad angegeben:

Formel 4: Arkusfunktion für Altgrad

$$\boxed{\mathbf{arc}\ \alpha° = \hat{\alpha} = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi}$$

Formel 5: Arkusfunktion für Neugrad

$$\boxed{\text{arc } \alpha^g = \widehat{\alpha} = \frac{\alpha^g}{200^g} \cdot \pi}.$$

3.5.2. Umkehrfunktionen für trigonometrische Funktionen

Außer der allgemeinen Arkusfunktion für Gradangaben (3.5.1) gibt es noch die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen **sin, cos** und **tan**.

Während die trigonometrischen Funktionen

$x = \sin\,\alpha$ (oder $\sin\,\alpha^\circ$ oder $\sin\,\alpha^g$),
$x = \cos\,\alpha$ (oder $\cos\,\alpha^\circ$ oder $\cos\,\alpha^g$) und
$x = \tan\,\alpha$ (oder $\tan\,\alpha^\circ$ oder $\tan\,\alpha^g$)

jeweils den Funktionswert $\boldsymbol{x}$ zu einer Winkelangabe liefern, ergibt sich bei einer Umkehrfunktion aus dem Funktionswert $\boldsymbol{x}$ der zugehörige Winkel $\boldsymbol{\alpha}$.

Ursprünglich sind diese Arkusfunktionen so definiert worden, dass sie zu einem gegebenen Funktionswert jeweils einen Winkel im Bogenmaß lieferten.

Formel 6: Arkussinusfunktion

$\boxed{\widehat{\alpha} = \arcsin x}$ und

Formel 7: Arkuskosinusfunktion

$\boxed{\widehat{\alpha} = \arccos x}$ und

Formel 8: Arkustangensfunktion

$\boxed{\widehat{\alpha} = \arctan x}$.

Computerprogramme und Taschenrechner liefern bei diesen Umkehrfunktionen die Winkelgröße nicht nur im Bogenmaß, sondern auch in Altgrad oder Neugrad, je nachdem, wie das Winkelformat (die Winkeleinheit) auf dem Gerät vorgewählt wurde.

Deshalb wird in dieser Formelsammlung die allgemeine Winkelangabe verwendet (also ohne Angabe des Bogens für das Bogenmaß), wenn es auf die Winkeleinheit des Ergebnisses nicht ankommt:

Für die Umkehrfunktion der Winkelfunktionen gilt:

Formel 9: Arkussinusfunktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \arcsin x \\ x = \sin(\arcsin x) \end{array}}$$

Formel 10: Arkuskosinusfunktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \arccos x \\ x = \cos(\arccos x) \end{array}}$$

Formel 11: Arkustangensfunktion

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \arctan x \\ x = \tan(\arctan x) \end{array}}$$

Das Argument $\boldsymbol{x}$ ist ein Zahlenwert ohne Maßeinheit (reine Zahl, dimensionslose Zahl). Bei diesen Umkehrfunktionen ist immer das **Gültigkeitsintervall** (Quadrantenrelation) der Winkelwerte zu beachten. Das Ergebnis ist immer ein Winkelwert.

3.5.3. Umkehrfunktionen auf Taschenrechnern

Auf den meisten Taschenrechnern sind die Umkehrfunktionen asin, acos und atan auf den Tasten zu finden. Der Tastendruck startet die jeweilige mathematische Umkehrfunktion.

3.5.4. Kehrwerte der trigonometrischen Funktionen

Zu den trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens wurden auch die Kehrwerte (Reziprokwerte) als Funktionen definiert:

Formel 12: Kosekansfunktion

$$\boxed{\mathbf{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{sin}\,\alpha}}$$

Formel 13: Sekansfunktion

$$\boxed{\mathbf{sec}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{cos}\,\alpha}}$$

Formel 14: Kotangensfunktion

$$\boxed{\mathbf{cot}\,\alpha = \frac{1}{\mathbf{tan}\,\alpha}}.$$

Die Bezeichnungen ***Sekans*** (**sec**), ***Kosekans*** (**cosec**) und ***Kotangens*** (**cot**) für die Kehrwerte sind veraltet und werden kaum mehr verwendet. Die Erklärungen sind in jedem Mathematikhandbuch unter dem Stichwort „Goniometrie[5]" zu finden (siehe auch Lit.[MathHb], dort Seite 269).

[5] Das Wort *Goniometrie* kommt aus dem Griechischen: ***gonia*** = *Winkel*, ***metrein*** = *messen*

4. Der Schwerpunkt des Dreiecks

4.1. Allgemeines Prinzip zur Berechnung von Schwerpunkten

Wenn in der mathematischen Literatur vereinfachend von Schwerpunkten die Rede ist, dann ist immer deren Lage gemeint. Die Kenntnis der Lage der Schwerpunkte in Flächen und Körpern ist im praktischen Berufsleben von Ingenieuren und Wissenschaftlern sehr wichtig, deshalb dürfen die Formeln dafür in den Formelsammlungen nicht fehlen.

Für die Berechnung der Lage eines Schwerpunkts ist das statische Moment ***S*** einer Fläche in Bezug auf einen beliebigen festen Punkt erforderlich. Es ist das Produkt Flächeninhalt mal Abstand von diesem Punkt. Die statischen Momente aller Flächenelemente in Bezug auf den Schwerpunkt der Gesamtfläche heben sich auf. Die Drehmomente einer Fläche oder eines Körpers, der im Schwerpunkt aufgehängt ist, sind also null.

Die Schwerpunktlage in einer Figur in Bezug auf einen gewählten festen Punkt wird aus den Flächenelementen **d*A*** und der Summe ***S*** der statischen Momente **d*S*** dieser Flächenelemente durch die Division ***S*/*A*** berechnet.

Statisches Moment ***S*** und Fläche ***A*** können dabei durch Summenbildung (bei geradlinig begrenzten Figuren) oder durch Integral (bei durch Kurven begrenzten Figuren) berechnet werden.

Der allgemeine mathematische Ansatz, der den Abstand $\boldsymbol{e_s}$ des Schwerpunkts (Schwerpunktlage) zu einem beliebigen Bezugspunkt angibt, lautet:

Formel 15: Schwerpunktlage

$$\boxed{e_S = \frac{S}{A} = \frac{\int a\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A} = \frac{\int \mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}A}}$$

Erläuterungen:

d*S* = *a* · d*A*, ist das statische Moment einer Teilfläche **d*A***, die einen bestimmten Abstand ***a*** von einem bestimmten Drehpunkt (Bezugspunkt) hat.
S ist das statische Moment der Gesamtfläche aus der Summe oder dem Integral aller **d*S***.
A ist die Gesamtfläche[6] der Figur aus der Summe oder dem Integral der Teilflächen **d*A***.
$\boldsymbol{e_S}$ ist der Abstand des Schwerpunkts der Figur vom gewählten Drehpunkt.

Für die Berechnung des Schwerpunkts im Dreieck wird der Berechnungsgang über das Integral nach Formel 15 gezeigt.

4.2. Zeichnerische Ermittlung des Schwerpunkts im Dreieck

Jeder Schüler weiß, dass der Schwerpunkt beim Dreieck im unteren Drittelspunkt der Seitenhalbierenden liegt. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierende im Verhältnis 2:1.

Alle Seitenhalbierenden schneiden sich in einem Punkt, nämlich im Schwerpunkt. Damit kann der Schwerpunkt des Dreiecks zeichnerisch sehr leicht ermittelt werden.

4.3. Mathematischer Beweis der Schwerpunktlage im Dreieck

Obwohl der Schwerpunkt des Dreiecks zeichnerisch sehr leicht ermittelt werden kann, ist der mathematische Beweis nicht so einfach. Wir verwenden das oben unter 4.1 beschriebene Prinzip.

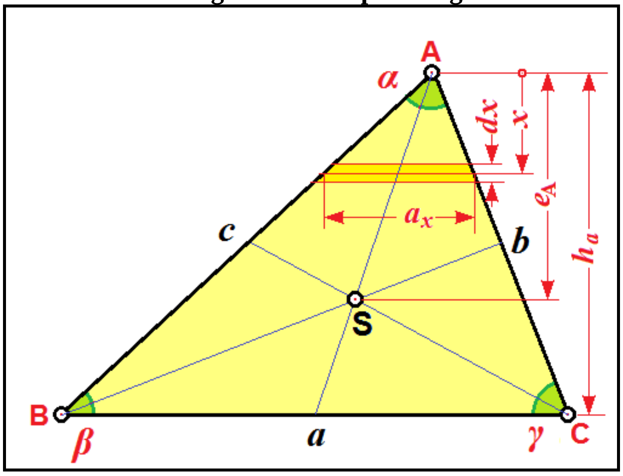
---

[6] Bitte Bezeichnungen nicht verwechseln: Eckpunkt **A** und Flächeninhalt ***A*** (*kursiv geschrieben*)

Wir nehmen ein beliebiges Dreieck **ABC** und zeichnen die drei Seitenhalbierenden ein. Sie schneiden sich in einem Punkt, dem Schwerpunkt **S**. Nun teilen wir die gesamte Dreiecksfläche parallel zur Seite ***a*** in schmale Streifen der Breite ***dx*** ein.

Sie haben alle ihren Schwerpunkt in der Mitte, nämlich auf der Seitenhalbierenden. Wir zeichnen stellvertretend für alle Streifen nur einen einzigen. Dieser hat die Entfernung ***x*** vom Eckpunkt **A**.

Bild 1: Berechnung der Schwerpunktlage im Dreieck



Nun entwickeln wir den Ansatz nach Formel 15:

$$\mathrm{d}A = a_x \cdot dx = \frac{a}{h_a} \cdot x \cdot dx$$

$$\mathrm{d}S = x \cdot \mathrm{d}A = a_x \cdot x \cdot dx = \frac{a}{h_a} \cdot x^2 \cdot dx$$

$$e_\mathrm{A} = \frac{S}{A} = \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A} = \frac{\int \mathrm{d}S}{\int \mathrm{d}A} = \frac{\int_0^{h_a} \frac{a}{h_a} \cdot x^2 \cdot dx}{\int_0^{h_a} \frac{a}{h_a} \cdot x \cdot dx} = \frac{\frac{a}{h_a} \int_0^{h_a} x^2 \cdot dx}{\frac{a}{h_a} \int_0^{h_a} x \cdot dx} = \frac{\frac{h_a^3}{3}}{\frac{h_a^2}{2}} = \frac{2}{3} \cdot h_a$$

Formel 16: Schwerpunktabstand vom Eckpunkt A

$$\boxed{e_\mathrm{A} = \frac{2}{3} \cdot h_a}$$

Da der Eckpunkt **A** keine Vorrangstellung im Dreieck hat, gilt für alle Höhen in den Dreiecken:

Formel 17: Verhältnis Schwerpunktabstand zu Höhe

$$\boxed{\frac{e_\mathrm{A}}{h_a} = \frac{e_\mathrm{B}}{h_b} = \frac{e_\mathrm{C}}{h_c} = \frac{2}{3}}$$

Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt, vom Eckpunkt aus gemessen, in zwei Drittel der Dreieckshöhe.

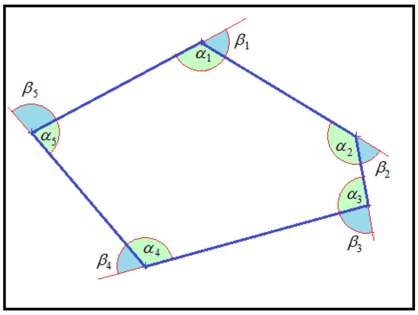
Damit gilt auch:
Der Schwerpunkt eines Dreiecks liegt, vom Eckpunkt aus gemessen, im zweiten Drittelspunkt der Seitenhalbierenden.

5. Die Summe der Innenwinkel

5.1. Mathematischer Beweis für ein n-Eck (Polygon)

Wir wollen hier allgemein die Summe der Innenwinkel für ein beliebiges konvexes[7] Polygon mit $\boldsymbol{n}$ Ecken (n-Eck) berechnen.

Bild 2: Innenwinkel im n-Eck



In Bild 2 ist ein beliebiges n-Eck zu sehen.

Die Winkel α_i sind die Innenwinkel und die Winkel β_i sind die Ergänzungswinkel zu 180°.

Bei $\boldsymbol{n}$ Ecken sind $\boldsymbol{n}$ gestreckte Winkel mit $\boxed{\alpha_i + \beta_i = 180°}$ vorhanden.

Diese haben zusammen die Summe:

(1) $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i) = n \cdot 180°}$.

Alle Winkel β_i zusammen betragen 360°:

(2) $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\beta_i) = 360° = 2 \cdot 180°}$.

Das wird anschaulich, wenn man in Bild 2 von einem Eckpunkt ausgehend zum nächsten Eckpunkt fährt und dort eine Rechtsdrehung zum übernächsten Eckpunkt ausführt. Da dies im Gesamten nur eine einzige Außenumrundung von 360° erfordert, ist (2) anschaulich bewiesen.

(2) in (1) eingesetzt ergibt:

(3) $\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i) + 2 \cdot 180° = n \cdot 180°}$.

Daraus ergibt sich die Summe der Innenwinkel im n-Eck:

Formel 18: Summe der Innenwinkel im n-Eck

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i) = (n-2) \cdot 180°}$$

Bei einem Dreieck ist $\boldsymbol{n}$ = 3 zu setzen, daraus folgt: ***Winkelsumme im Dreieck = 180°***.

5.2. Zeichnerischer Beweis für das Dreieck

Für das Dreieck kann man die Summe der Innenwinkel auch zeichnerisch „beweisen“, indem man in Bild 1 die Seite $\boldsymbol{c}$ mit dem Winkel β von Eckpunkt **B** parallel entlang der Seite $\boldsymbol{a}$ zum Eckpunkt **C** verschiebt. Dann gehen alle drei Richtungen der Dreieckseiten durch den Eckpunkt C, wobei alle drei Winkel **γ + α + β = 180°** über einer Linie (Verlängerung von $\boldsymbol{a}$) zu sehen sind.

[7] konvex: ohne einspringende Ecken

6. Dreiecksungleichungen

Beim Dreieck müssen zwei Seiten zusammen immer länger sein als die dritte Seite, sonst lässt sich kein Dreieck zeichnen. Diese Bedingung muss für alle drei Seiten geprüft werden und in jedem Fall zutreffen. Alle Bedingungen in Formel 19 müssen erfüllt sein.

Formel 19: Bedingungen für Dreiecke

$$\boxed{\begin{array}{l} \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}>\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}>\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b} \end{array}}$$

In einem Computerprogramm können diese Bedingungen automatisch abgefragt werden. Bei fehlerhafter Eingabe der Seitenlängen erfolgt eine Fehlermeldung.

Fehlerhaftes Beispiel:

$\boldsymbol{a} = 7$
$\boldsymbol{b} = 8$
$\boldsymbol{c} = 20$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 7+8>20\,\mathbf{?} & \text{trifft nicht zu} \\ 8+20>7\,\mathbf{?} & \text{ja, trifft zu} \\ 20+7>8\,\mathbf{?} & \text{ja, trifft zu} \end{array}}$$

Eine der Abfragen trifft nicht zu, weil zwei Seiten kleiner als die dritte Seite sind: $\boxed{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\leq\boldsymbol{c}}$.

Diese drei Seitenlängen ergeben kein Dreieck.

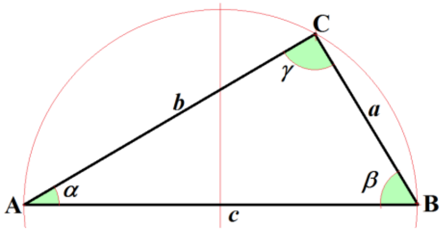
7. Formeln und Sätze für das rechtwinklige Dreieck

Das rechtwinklige Dreieck ist ein Sonderfall des allgemeinen Dreiecks. Viele Lehrsätze und Definitionen fußen auf dem rechtwinkligen Dreieck. Selbst die Berechnungen des allgemeinen Dreiecks stützen sich auf das rechtwinklige Dreieck. Deshalb wird es hier zuerst behandelt.

7.1. Benennungen

Beim rechtwinkligen Dreieck gibt es besondere Benennungen, die in Bild 3 gezeigt sind:

Bild 3: Das rechtwinklige Dreieck



Die rechtwinklig aufeinanderstoßenden Seiten $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ nennt man **Katheten**. Die rechte Winkel γ liegt bei Eckpunkt **C**, gegenüberliegende Seite $\boldsymbol{c}$ wird **Hypotenuse** genannt.

Für die Eckpunkte werden die Bezeichnungen **A**, **B** und **C** verwendet. Die den Eckpunkten gegenüberliegenden Seiten werden mit den kleinen Buchstaben $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ den Eckpunkten entsprechend bezeichnet. Ebenso werden die Eckwinkel analog den Eckpunkten mit den kleinen griechischen Buchstaben $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\gamma}$ bezeichnet.

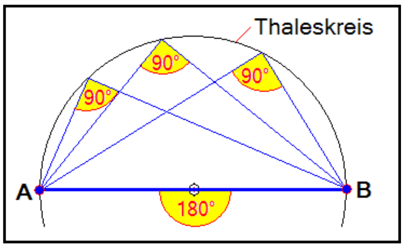
7.2. Der Thaleskreis

7.2.1. Definition

*Ist die Hypotenuse $\overline{\mathrm{AB}}$ des rechtwinkligen Dreiecks der Durchmesser eines Kreises, dann liegt der gegenüberliegende Eckpunkt **C** mit dem rechten Winkel auf der Kreislinie.*

Alle Peripheriewinkel über dem Halbkreis sind rechte Winkel (Bild 4).

Bild 4: Thaleskreis



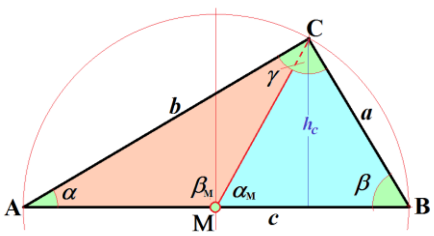
Dieser Satz stammt von *Thales von Milet* (624 bis 547 v. Chr.):

*Der geometrische Ort der Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte **A** und **B** gehen, ist der Kreis um den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte mit dem Abstand der beiden Punkte als Durchmesser.*

Der Satz von Thales ist ein Sonderfall der Peripheriewinkel für den Zentriwinkel 180° (Thaleskreis). Die Peripheriewinkel sind in Lit. [Praxl1] behandelt.

7.2.2. Teilung des rechtwinkligen Dreiecks

Bild 5: Teilung in zwei gleichschenklige Dreiecke



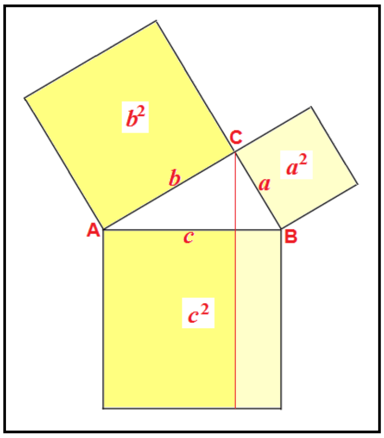
Zieht man vom Mittelpunkt **M** des Kreises in Bild 5 eine Gerade zum Eckpunkt C, dann wird das rechtwinklige Dreieck in zwei gleichschenklige Dreiecke mit gleichem Flächeninhalt geteilt. Jedes gleichschenklige Dreieck hat als Grundlinie den Kreisradius $\boldsymbol{c}/2$ (= halber Durchmesser) und die Höhe $\boldsymbol{h_c}$. Die Teilungswinkel am Mittelpunkt betragen:

Gegenüber der Seite $\boldsymbol{b}$: $\boxed{\beta_M = 180° - 2 \cdot \alpha}$ und

gegenüber der Seite $\boldsymbol{a}$: $\boxed{\alpha_M = 180° - 2 \cdot \beta}$.

7.3. Der Satz des Pythagoras

Bild 6: Der Satz des Pythagoras



Der nachstehende Lehrsatz war in Spezialfällen schon den Ägyptern, den Babyloniern und den Indern bekannt. Er wurde erstmals von *Pythagoras* (um 576 - 496 v. Chr.) bewiesen. Deshalb erhielt er auch seinen Namen.

Euklid definiert den Satz des Pythagoras im Ersten Buch seiner „Elemente" unter Nr. 47:

Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.

Euklid zeigt an der angegebenen Stelle auch gleich den Beweis anhand einer Zeichnung, den wir hier nicht wiederholen wollen.

Bild 6 zeigt die Situation. Der rechte Winkel befindet sich bei Punkt **C**.

Für die Seitenlängen **a > 0,** ***b*** **> 0** und ***c*** **> 0** im rechtwinkligen Dreieck ***a***, ***b*** und ***c*** gilt:

Formel 20: Der Satz des Pythagoras

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Der Satz des Pythagoras nach Formel 20 gilt also für alle positive reelle Zahlen.

7.3.1. Beweise

Es gibt unzählige Beweise des Satzes, meist anhand von Zeichnungen. Im Jahre 1752 wurde der Universität Halle eine Doktorarbeit (**Dissertatio Inauguralis Sistens Theorematis Pythagorici Demonstationes Plures** von *F. Ch. Jetze*) vorgelegt, die 33 verschiedene Beweise des „Pythagoras" enthielt.

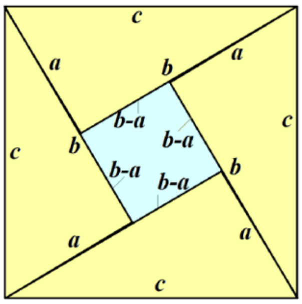
7.3.1.1. Beweis durch Parallelverschiebung von Flächenelementen

Der bekannteste Beweis geht von der Figur in Bild 6 aus. Das Quadrat a^2 wird am Eckpunkt **C** parallel zur Seite ***b*** bis zum Eckpunkt **A** verschoben, sodass ein Parallelogramm mit der Grundlinie ***c*** entsteht. Dieses wird um den Eckpunkt **B** um 90° in das untere Quadrat hinein gedreht. Dann folgt eine Parallelverschiebung des Parallelogramms in das Quadrat c^2 hinein. Es entsteht ein Rechteck, das in unteren Quadrat genau unter der Seite ***a*** liegt (siehe Bild 6, rechter Teil). Das Gleiche wird mit dem Quadrat über ***b*** gemacht.

Am Schluss sieht man, dass sich die parallel verschobenen Fläche in der Summe mit dem Quadrat unter ***c*** decken. Damit ist der geometrische Beweis erbracht. Der Leser möge die beschriebenen Schritte selbst nachvollziehen.

7.3.1.2. Indischer Beweis (1) durch Flächenberechnung

Bild 7: Indischer Beweis (1)



Beweis nach dem Hindu *Bhaskara* (1150 n. Chr.).

In Bild 7 befinden sich in einem Quadrat der Größe c^2 vier rechtwinklige Dreiecke mit ihrer Seite ***c*** nach außen.

Wir müssen nur die Flächen nachrechnen:

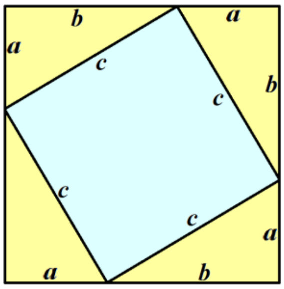
Formel 21: Indischer Beweis (1)

$$c^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (b-a)^2 = 2 \cdot a \cdot b + (b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2) = a^2 + b^2$$

Daraus folgt Formel 20: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$.

7.3.1.3. *Indischer Beweis (2) durch Flächenberechnung*

Bild 8: Indischer Beweis (2)



In Bild 8 befindet sich ein Quadrat der Größe c^2 in einem Quadrat der Größe $(a+b)^2$. Wir müssen nur die Flächen nachrechnen:

Formel 22: Indischer Beweis (2)

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = 2 \cdot a \cdot b + c^2$$

Daraus folgt Formel 20: $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Diese drei Beweise mögen zur Demonstration genügen.

7.4. Pythagoreische Tripel

Allgemein gilt der Satz des Pythagoras nach Formel 20 für alle positive reellen Zahlen.

Innerhalb dieses Zahlenbereichs gibt es für die Formel 20 auch ganzzahlige Lösungen, bei denen ***a, b*** und ***c*** natürliche Zahlen (ℕ) sind. Diese Sonderfälle nennt man pythagoreische Tripel.

7.4.1. *Definition*

*Ein Tripel (**a,b,c**) von positiven ganzen Zahlen heißt pythagoreisches Tripel, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Ein pythagoreisches Tripel heißt primitiv, wenn **a,b,c** teilerfremd sind.*

Der folgende Satz gibt eine Beschreibung aller primitiven Tripel:

*Jedes pythagoreische Tripel (**a,b,c**) mit geradem **a** erhält man genau einmal in der Form*

Formel 23: Pythagoreisches Tripel

$$a = 2uv\,,\; b = u^2 - v^2\,,\; c = u^2 + v^2$$

*mit **u,v** $\in$ ℕ, teilerfremd, nicht beide ungerade, u > v > 0.*

Plato (etwa 430 – 349 v.Chr.) verwendete folgenden Ansatz, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $c - a = 2$ gilt:

Formel 24: Pythagoreisches Tripel

$$a = n^2 - 1\,,\; b = 2n\,,\; c = n^2 + 1.$$

7.4.2. *Praktische Anwendung*

Das berühmteste pythagoreische Tripel ist: $\boxed{3^2 + 4^2 = 5^2}$.

Diese Lösung diente früher zur Absteckung rechter Winkel auf der Baustelle: Eine 12 m lange Schnur erhielt nach 3 Metern und dann nach weiteren 4 Metern einen Knoten. Dadurch wurde sie in Teillängen von 3, 4 und 5 m aufgeteilt. Wurden die beiden Enden der Schnur von einer Person und an den Knoten von je einer weiteren Person gehalten und gespannt, ergab die gespannte Schnur ein rechtwinkliges Dreieck.

7.5. Der Satz des Euklid

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Produkt der Hypotenuse und dem betreffenden Kathetenabschnitt auf der Hypotenuse.

In Bild 6 ist dies durch die rote Trennlinie und unterschiedliche farbliche Hinterlegungen der Flächen angedeutet.

Der Beweis dieses Satzes wird mit dem Beweis unter 7.3.1.1 abgedeckt.

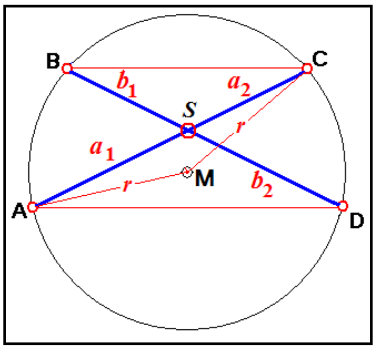
7.6. Der Höhensatz

Der Höhensatz ist eine Kombination der Sätze von Euklid und von Pythagoras. Er gilt nur im rechtwinkligen Dreieck.

In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Höhe (durch den rechten Winkel) gleich dem Produkt der beiden Hypotenusenabschnitte.

Der Beweis kann mit dem Sehnensatz des Kreises geführt werden, der in Lit. [Praxl1] zu finden ist. Er wird hier wiederholt:

Bild 9: Sehnensatz im Kreis



Sind a_1 und a_2 die Abschnitte der einen Sehne und b_1 und b_2 die Abschnitte der anderen Sehne (Bild 9), dann gilt:

Formel 25: Sehnensatz im Kreis

$$\boxed{a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2}$$

Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises in einem Punkt S (Schnittpunkt) schneiden, dann ist das Produkt aus den Abschnitten der einen Sehne dem Produkt der Abschnitte der anderen Sehne gleich.

Euklid formulierte diesen Sehnensatz nicht mit Produkten aus Zahlen, sondern mit der geometrischen Figur eines Rechtecks:

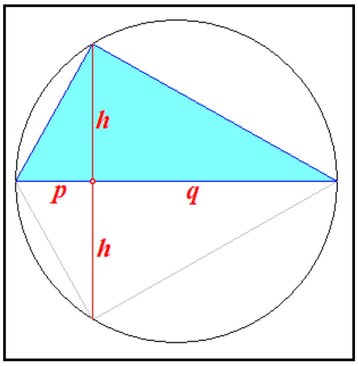
Schneiden im Kreise zwei Sehnen einander, so ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen dem Rechteck aus den Abschnitten der anderen gleich.

Hier sind die Flächengrößen der durch die Abschnitte zu bildenden Rechtecke gemeint.

Wir haben oben unter 7.2 den Thaleskreis behandelt. Zeichnet man im Thaleskreis die Höhe des rechtwinkligen Dreiecks ein und spiegelt das Ganze um die Hypotenuse, dann entsteht ein Kreis mit zwei sich im rechten Winkel kreuzenden Sehnen (siehe Bild 10), auf die der Sehnensatz angewendet werden kann:

Die eine Sehne hat zwei Abschnitte je mit der Länge h, die andere Sehne hat die Abschnitte p und q.

Bild 10: Beweis des Höhensatzes



Formel 26: Höhensatz

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

7.7. Der Hauptsatz des Euklid

7.7.1. Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras

Im VI. Buch der „Elemente“ des *Euklid* (Lit. [Euklid]) wird unter Nr. 31 eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras formuliert:

Im rechtwinkligen Dreieck ist eine (geradlinige) Figur über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den ähnlichen, über den den rechten Winkel umfassenden Seiten ähnlich gezeichneten Figuren zusammen gleich.

Diese Verallgemeinerung sagt aus, dass der Satz des Pythagoras nicht nur für Quadrate gilt, sondern für ähnliche Figuren allgemein. Euklid hat an der angegebenen Stelle diesen Satz bewiesen. Der dortige Beweis gilt für geradlinig begrenzte Figuren, lässt sich aber mit Hilfe der Integralrechnung auch für mathematische Funktionen beweisen. Diese Verallgemeinerung wird als Hauptsatz des Euklid bezeichnet.

7.7.2. Geometrische Ähnlichkeit

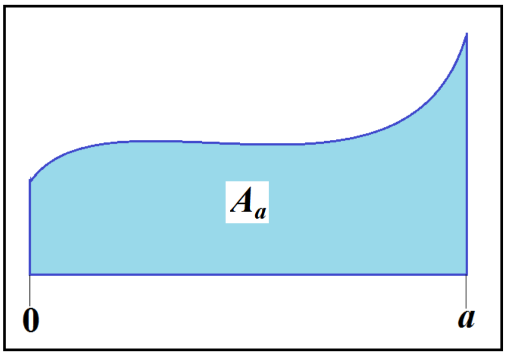
Bevor wir den Hauptsatz beweisen können, müssen wir noch definieren, was geometrisch unter „ähnlich“ zu verstehen ist.

Zwei Figuren sind einander ähnlich, wenn die eine durch Vergrößerung der anderen oder die andere durch Verkleinerung der einen ineinander übergeführt werden können, sodass sie deckungsgleich sind. Allgemein gesprochen, können ähnliche Figuren durch „Zoomen“ zur Deckung gebracht werden.

7.7.3. Beweis des Hauptsatzes des Euklid

Der Beweis lautet, ohne die oben erwähnte Integralrechnung bemühen zu müssen:

Bild 11: Figur A_a



Wenn eine beliebige Figur (Bild 11) mit der Länge $\boldsymbol{a}$ und dem Flächeninhalt $\boldsymbol{A_a}$ in eine ähnliche Figur mit der Länge $\boldsymbol{b}$ umgewandelt wird, dann ändert sich der Flächeninhalt quadratisch zur Länge auf $\boxed{A_b = b^2 \cdot \frac{A_a}{a^2}}$, bei einer ähnlichen Figur mit der Länge $\boldsymbol{c}$ ergibt sich dann die Fläche $\boxed{A_c = c^2 \cdot \frac{A_a}{a^2}}$. Jetzt schreiben wir noch die Fläche $\boldsymbol{A_a}$ als $\boxed{A_a = a^2 \cdot \frac{A_a}{a^2}}$.

Wenn $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ gilt, dann gilt auch: $\boxed{a^2 \cdot \frac{A_a}{a^2} + b^2 \cdot \frac{A_a}{a^2} = c^2 \cdot \frac{A_a}{a^2}}$. Nach Einsetzen der obigen Ausdrücke für $\boldsymbol{A_a}$, $\boldsymbol{A_b}$ und $\boldsymbol{A_c}$ folgt:

Formel 27: Hauptsatz des Euklid

$\boxed{A_a + A_b = A_c}$, was zu beweisen war.

Wir können also an die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks nicht nur Quadrate, sondern beliebige ähnliche Figuren setzen.

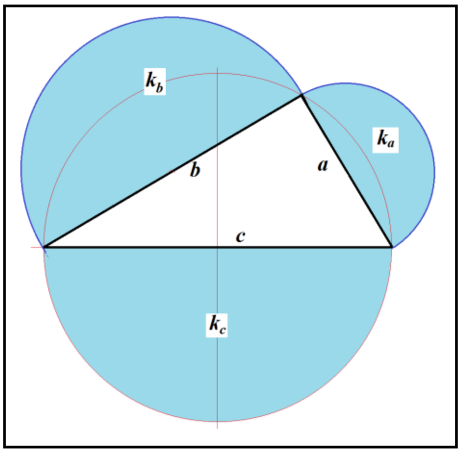
Die Figuren müssen nicht voll an den Dreieckseiten anliegen, es genügt, wenn das auf die Dreieckseiten projizierte Größenverhältnis der linearen Maße der ähnlichen Figuren ***a:b:c*** beträgt.

Beispiel:

Ein Kreis mit dem Durchmesser ***a*** berührt von außen die Mitte der Dreieckseite ***a***,
ein Kreis mit dem Durchmesser ***b*** berührt von außen die Mitte der Dreieckseite ***b***,
ein Kreis mit dem Durchmesser ***c*** berührt von außen die Mitte der Dreieckseite ***c.***
Dann ist die Kreisfläche über mit dem Durchmesser c die Summe der beiden Kreisflächen mit den Durchmessern a und b

7.7.4. Beispiel mit Halbkreisen

Bild 12: Hauptsatz des Euklid mit Halbkreisen



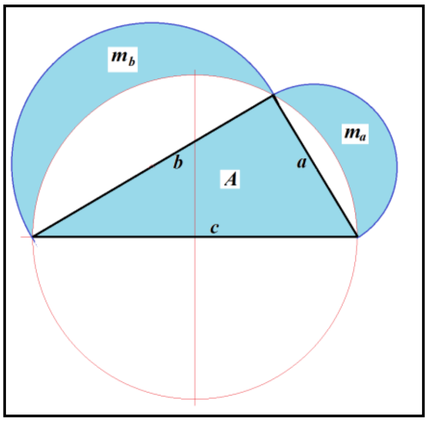
Die beiden Halbkreise über den Katheten sind dem Halbkreis über der Hypotenuse flächengleich:

Formel 28: Hauptsatz des Euklid für Halbkreise

$\boxed{k_a + k_b = k_c}$.

7.7.5. Die Möndchen des Hippokrates

Bild 13: Möndchen des Hippokrates



Hippokrates von Chios (um 460 – 370 v. Chr.), war der berühmteste Arzt[8] des Altertums, beschäftigte sich aber auch mit Geometrie. Als Möndchen (lat. *lunula*, griech. $\mu\eta\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$) bezeichnete er jedes zwischen zwei Kreisbögen liegende Flächenstück.

Die beiden Möndchen über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen dem Dreieck flächengleich.

Beweis:

Bezeichnen wir die beiden Möndchen in Bild 13 mit m_a und m_b , die Halbkreise über den Dreieckseiten mit k_a , k_b und k_c (siehe Bild 12) und die Dreieckfläche mit A. Dann können wir rechnen:

(1) $k_a + k_b = k_c$

(2) $k_a + k_b + A - k_c = m_a + m_b$

(1) in (2) eingesetzt ergibt:

(3) $k_c + A - k_c = m_a + m_b$.

Daraus folgt:

Formel 29: Möndchen des Hippokrates

$\boxed{A = m_a + m_b}$

Diese Formel bestätigt die Richtigkeit der Quadratur der Möndchen.

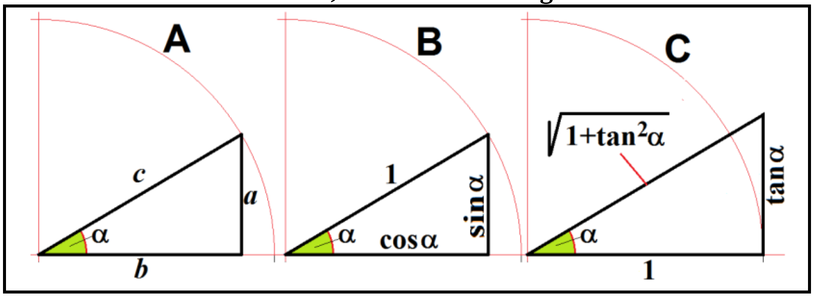
---

[8] Man denke an den „Hippokratischen Eid“ der Ärzte.

7.8. Definition der trigonometrischen Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) **Sinus**, und **Kosinus** werden im rechtwinkligen Dreieck (Bild 14A) als Verhältnis von Seitenlängen definiert.

Bild 14: Definition von Sinus, Kosinus und Tangens



7.8.1. Definition von Sinus, Kosinus und Tangens

Formel 30: Definition des Sinus

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

Formel 31: Definition des Kosinus

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

Formel 32: Definition des Tangens

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{a}{b}}$$

Bild 14B zeigt die Verhältnisse für den Sinus und Kosinus am Einheitskreis mit dem Radius *r* = 1.

7.8.2. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen

Bild 14B zeigt auch die Richtigkeit des auf die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus angewendeten „Pythagoras“:

Formel 33: „Pythagoras“ mit Sinus und Kosinus

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}\ .$$

Der Tangens ist aber auch die Länge der Tangente des Winkels am Einheitskreis (Bild 14C).

Formel 34: Sinus aus Tangens

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$

Formel 35: Kosinus aus Tangens

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$

Die anderen Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen, die Vorzeichen der Winkelfunktionen in den vier Winkelfeldern (Quadranten) des Kreises, die trigonometrischen Funktionen von Winkelsummen und Winkeldifferenzen, von doppelten und halben Winkeln und die Summen und Differenzen von möge der Leser in den üblichen Formelsammlungen nachschlagen.

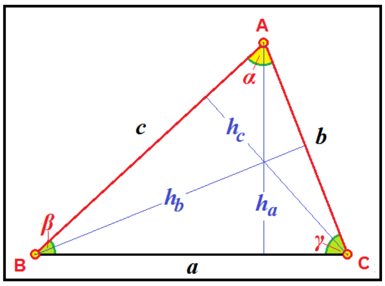
8. Formeln für das allgemeine Dreieck

Bevor wir uns mit der Berechnung beliebiger Dreiecke beschäftigen werden, müssen wir noch einige Lehrsätze herleiten, die für diese Berechnungen verwendet werden sollen.

8.1. Der Sinussatz

Um den Sinussatz herzuleiten, brauchen wir die Höhen im Dreieck. Die Höhen stehen rechtwinklig auf den zugehörigen Dreieckseiten (Grundlinien).

Bild 15: Höhen im Dreieck



Der Flächeninhalt A im Dreieck wird aus Grundlinie und Höhe berechnet:

Formel 36: Fläche aus Grundlinie und Höhe

$$\boxed{A = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}}.$$

Formel 37: Höhen im Dreieck

$$\boxed{\begin{aligned} h_a &= c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \\ h_b &= c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma \\ h_c &= a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha \end{aligned}}$$

Wir setzen die Höhenwerte aus Formel 37 in Formel 36 ein und erhalten:

$$2 \cdot A = a \cdot h_a = a \cdot c \cdot \sin\beta = a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

$$2 \cdot A = b \cdot h_b = b \cdot c \cdot \sin\alpha = b \cdot a \cdot \sin\gamma$$

$$2 \cdot A = c \cdot h_c = c \cdot a \cdot \sin\beta = c \cdot b \cdot \sin\alpha$$

Wir vereinfachen und streichen die doppelten Terme:

Formel 38: Fläche aus 2 Seiten und dazwischenliegendem Winkel

$$\boxed{2 \cdot A = a \cdot c \cdot \sin\beta = a \cdot b \cdot \sin\gamma = b \cdot c \cdot \sin\alpha}$$

Nun teilen wir Formel 38 durch $\boxed{a \cdot b \cdot c}$ und erhalten:

$$\frac{2 \cdot A}{abc} = \frac{a \cdot c \cdot \sin\beta}{abc} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{abc} = \frac{b \cdot c \cdot \sin\alpha}{abc}.$$

Daraus folgt durch Kürzen der Sinussatz:

Formel 39: Sinussatz mit Seitenlängen im Nenner

$$\boxed{\frac{2 \cdot A}{abc} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}}$$

Der Sinussatz wird auch mit den Reziprokwerten der Terme verwendet:

Formel 40: Sinussatz mit Seitenlängen im Zähler

$$\boxed{\frac{abc}{2 \cdot A} = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

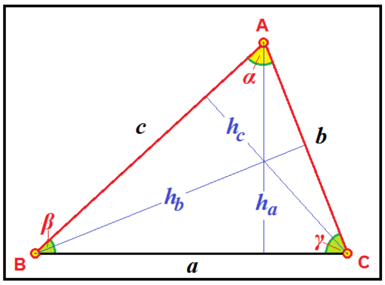
Der erste Term $\boxed{\frac{abc}{2 \cdot A}}$ in Formel 40 ist der doppelte Umkreisradius $\boxed{2r = \frac{abc}{2 \cdot A}}$ des Dreiecks (vergleiche Formel 46). Damit hängt der Umkreisradius mit dem Sinussatz zusammen.

8.2. Der Kosinussatz

Mit dem Kosinussatz kann aus zwei Dreieckseiten und dem dazwischenliegenden Winkel die dritte Seite berechnet werden.

Wir verwenden zur Herleitung des Kosinussatzes

Bild 15:



$$h_a = c \cdot \sin\beta$$

$$b^2 = h_a^{\ 2} + (a - c \cdot \cos\beta)^2$$

$$b^2 = c^2 \cdot \sin^2\beta + (a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta + c^2 \cdot \cos^2\beta)$$

$$b^2 = c^2 \cdot (\sin^2\beta + \cos^2\beta) + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta = c^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta .$$

Daraus folgt der Kosinussatz für die Seite ***b***:

Formel 41: Kosinussatz für die Seite b

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta}$$

Da die Seite ***b*** keinen Vorrang hat, können Formeln für die anderen beiden Seiten durch zyklische Vertauschung hingeschrieben werden:

Formel 42: Kosinussatz für die Seite c

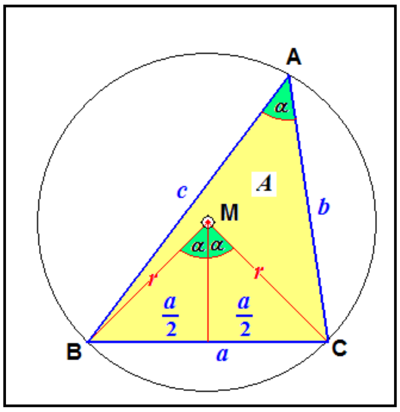
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

Formel 43: Kosinussatz für die Seite a

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha}$$

8.3. Umkreisradius

Bild 16: Umkreisradius eines beliebigen Dreiecks



Es seien ***a, b*** und ***c*** die Seiten und ***A*** die Fläche eines beliebigen Dreiecks, das in Bild 16 dargestellt ist.

Im Dreieck **ABC** mit den Seiten ***a, b*** und ***c*** liegt der Winkel α am Eckpunkt **A** der Seite ***a*** gegenüber. Der Zentriwinkel **CMB** des Umkreises über der Seite ***a*** beträgt am Kreismittelpunkt 2α, weil der Winkel α am Punkt **A** der zugehörige Peripheriewinkel[9] ist.

Wird das Lot vom Mittelpunkt auf die Seite ***a*** gezogen, so teilt dieses Lot den Zentriwinkel in der Mitte, das Lot und der Radius bilden dann am Mittelpunkt den Winkel α.

Dann gilt:

Formel 44: Sinus aus Seitenlänge und Umkreisradius

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{2r}}.$$

[9] Siehe Kreisformeln in Lit. [Praxl1].

Hat man die Seitenlänge und den Sinus des gegenüberliegenden Winkel, dann ergibt sich der Umkreisradius.

Formel 45: Umkreisradius aus halber Seitenlänge und Sinus des gegenüberliegenden Winkels

$$\boxed{r = \frac{a}{2 \cdot \sin\alpha}}$$

Die Fläche A des Dreiecks wird aus den Seiten b und c und dem Sinus des Winkels α berechnet:

$A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin\alpha$. Nun wird der Sinus aus Formel 44 eingesetzt:

$$\boxed{A = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \frac{a}{2r}}.$$

Umgestellt nach dem Radius r ergibt sich:

Formel 46: Umkreisradius eines beliebigen Dreiecks

$$\boxed{r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}}.$$

Als Merksatz formuliert:

Die Division des Produktes der drei Seitenlängen eines Dreiecks durch das Vierfache der Dreiecksfläche ergibt den Umkreisradius des Dreiecks.

8.4. Umfang und halber Umfang

Sind die Seitenlängen eines Dreiecks a, b und c, dann gilt:

Formel 47: Umfang des Dreiecks

$$\boxed{U = a + b + c}$$

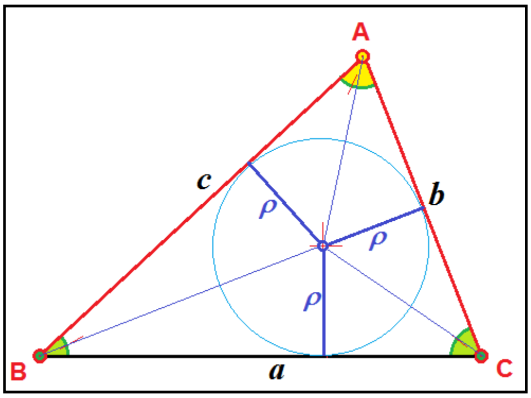
Der halbe Umfang wird in einigen Formeln als Hilfsgröße verwendet, die mit dem Formelzeichen s bezeichnet wird.

Formel 48: Halber Umfang des Dreiecks

$$\boxed{s = \frac{a + b + c}{2}}$$

8.5. Inkreisradius

Bild 17: Inkreis und Inkreisradius



Da die Dreieckseiten a, b und c als Tangenten am Innenkreis (Inkreis) des Dreiecks anliegen, kann man von den Eckpunkten zum Mittelpunkt des Kreises Linien ziehen. Dadurch entstehen drei neue Dreiecke, deren Flächeninhalt jeweils mit der Dreieckseite als Grundlinie und dem Kreisradius ρ als Höhe berechnet werden kann.

Der Flächeninhalt des gesamten Dreiecks beträgt:

Formel 49: Flächeninhalt aus halbem Umfang und Inkreisradius

$$\boxed{A = \rho \cdot \frac{a}{2} + \rho \cdot \frac{b}{2} + \rho \cdot \frac{c}{2} = \rho \cdot \frac{a + b + c}{2} = \rho \cdot s}.$$

Durch Umstellung dieses Ansatzes ergibt sich der Inkreisradius aus dem Flächeninhalt A, dabei ist s der halbe Umfang des Dreiecks:

Formel 50: Inkreisradius eines beliebigen Dreiecks

$$\boxed{\rho = \frac{A}{s}}$$

8.6. Die Heronische Formel

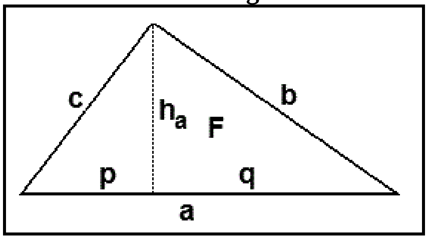
Allgemein gilt für das Dreieck: Der Flächeninhalt A ergibt sich als Produkt einer Seitenlänge (Grundlinie g) und der halben Höhe h auf diese Seite:

Formel 51: Flächeninhalt aus Grundlinie und Höhe

$$\boxed{A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}}$$

Die Heronische Formel erlaubt die Berechnung des Flächeninhalts A eines Dreiecks aus den drei Seitenlängen a, b und c. Wir leiten die Heronische Formel her, indem wir von Formel 51 ausgehen.

Bild 18 zur Herleitung der Heronischen Formel



Der Fußpunkt der Höhe h_a teilt die Seite a in zwei Teile: p und q.

(1) $\boxed{p+q=a} \Rightarrow \boxed{\frac{p+q}{2} = \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2a}}$

(2) $\boxed{h_a^2 = c^2 - p^2 = b^2 - q^2} \Rightarrow \boxed{p^2 - q^2 = c^2 - b^2} \Rightarrow$

$\boxed{(p+q)\cdot(p-q) = c^2 - b^2} \Rightarrow \boxed{a\cdot(p-q) = c^2 - b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{p-q}{2} = \frac{c^2-b^2}{2a}}$

aus (1) und (2) folgt:

(3) $\boxed{p = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}}$ und $\boxed{q = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}}$

Flächeninhalt A des Dreiecks:

(4) $\boxed{A = \frac{a \cdot h_a}{2}} \Rightarrow \boxed{A^2 = \frac{a^2 \cdot h_a^2}{4}} \Rightarrow \boxed{A^2 = \frac{a^2}{4}\cdot(c^2 - p^2)} \Rightarrow \boxed{A^2 = \frac{a^2}{4}\cdot(c-p)\cdot(c+p)}$

Nun setzen wir die Ausdrücke aus (3) in (4) ein und formen um:

$$\boxed{A^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\left(c - \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)\cdot\left(c + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 = \frac{a^2}{4}\cdot\left(\frac{2ac - a^2 + b^2 - c^2}{2a}\right)\cdot\left(\frac{2ac + a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 = \frac{a^2}{16a^2}\cdot\left(2ac - a^2 + b^2 - c^2\right)\cdot\left(2ac + a^2 - b^2 + c^2\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{16}\cdot\left(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\right)\cdot\left((a^2 + 2ac + c^2) - b^2\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{16}\cdot\left(b^2 - (a-c)^2\right)\cdot\left((a+c)^2 - b^2\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{16}\cdot\left(b - (a-c)\right)\left(b + (a-c)\right)\cdot\left((a+c) - b\right)\left((a+c) + b\right)} \Rightarrow$$

$$(5)\ \boxed{A^2 = \frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}}$$

Nun verwenden wir noch den halben Umfang aus Formel 48: $\boxed{s = \frac{a+b+c}{2}}$ und setzen ihn in (5) ein:

$$\boxed{A^2 = \frac{-a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2} = (s-a)\cdot(s-c)\cdot(s-b)\cdot s}.$$

Daraus folgt die Heronische Formel:

Formel 52: Heronische Formel

$$\boxed{A_{Dreieck} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$$

8.7. Hinweis auf Flächenberechnung von Vierecken

Die Flächenberechnung der Vierecke wird hier erwähnt, weil die Formeln der Heronischen Formel gleichen. Der Verfasser hat im Buch „Kreisformeln" (siehe Lit. [Praxl1]) die Formeln für das Sehnenviereck im Kreis und für das allgemeine konvexe Viereck getrennt hergeleitet. Hier werden die Formeln gegenübergestellt.

8.7.1. Sehnenviereck im Kreis

Die Heronische Formel für das Dreieck hat die gleiche Form wie die Formel für den Flächeninhalt des Sehnenvierecks im Kreis:

Formel 53: Flächeninhalt des Sehnenvierecks im Kreis

$$\boxed{A_{Sehnenviereck\ im\ Kreis} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}}.$$

a, b, c und ***d*** sind die Seitenlängen des Sehnenvierecks im Kreis. $\boxed{s = \frac{a+b+c+d}{2}}$ ist der halbe Umfang des Sehnenvierecks. Wenn man die Seite ***d*** im Sehnenviereck gleich null setzt, wird das Sehnenviereck zu einem Sehnendreieck, für die die Heronische Formel gilt.

8.7.2. Allgemeines konvexes Viereck

Auch die Formel für den Flächeninhalt eines beliebigen konvexen[10] Vierecks hat eine ähnliche Form wie die obigen Formeln.

Formel 54: Flächeninhalt eines beliebigen Vierecks

$$\boxed{A_{Viereck} = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d) - a\cdot b\cdot c\cdot d\cdot\cos^2\psi}}.$$

a, b, c und ***d*** sind die Seitenlängen des allgemeinen Vierecks. $\boxed{s = \frac{a+b+c+d}{2}}$ ist der halbe Umfang des Vierecks, ψ ist das arithmetische Mittel zweier Gegenwinkel im Viereck.

Sonderfälle:

Da im Sehnenviereck zwei Gegenwinkel immer zusammen 180° haben, ist ψ = 90° und $\cos\psi = 0$. Formel 53 ist damit ein Sonderfall der Formel 54.

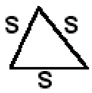
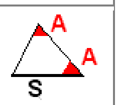
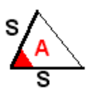
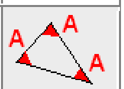
Für ***d*** = 0 ist Formel 52 (die Heronische Formel) ebenfalls ein Sonderfall der Formel 54.

9. Berechnung der Dreiecke

9.1. Mögliche Berechnungskombinationen

Ein Dreieck hat 3 Seiten und 3 Eckwinkel. Zur eindeutigen Berechnung eines Dreiecks müssen von diesen 6 Bestimmungsgrößen mindestens 3 bekannt sein.

Es gibt 6 mögliche Kombinationen (S = Seite, A = Winkel, lat.: **angulus**):

1.	**SSS** drei Seitenlängen	
2.	**ASA** eine Seitenlänge mit zwei anliegenden Winkeln	
3.	**SAA** eine Seitenlänge und zwei aufeinanderfolgende Winkel	
4.	**SAS** zwei Seitenlängen und der dazwischenliegende Winkel	
5.	**AAA** drei Winkel	
6.	**ASS** ein Winkel und zwei aufeinanderfolgende Seitenlängen	

Die beiden letzten Fälle sind nicht eindeutig bestimmbar:

[10] konvex = ohne einspringende Ecken.

Im Fall 5 des Dreiecks mit drei Winkeln ergibt sich lediglich die Form des Dreiecks, wegen Fehlens von Längenmaßen können Längen und Flächeninhalt nicht ermittelt werden. Diesen Fall behandeln wir nicht.

Im Fall 6 ergeben sich keine, eine oder zwei verschiedene Lösungen, je nach Größe des Winkels und der Länge der Seiten. Diesen Fall behandeln wir nicht.

9.2. Berechnungsablauf und Formeln

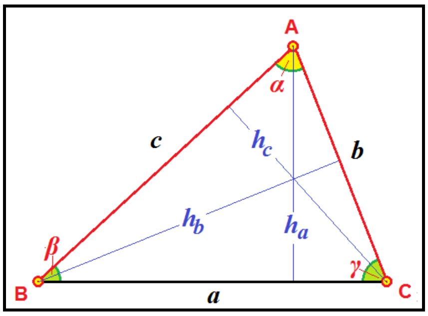
Für den Taschenrechner werden die Fälle 1 bis 4 aufbereitet.

Dazu werden die bekannten Formeln aus der Formelkiste bzw. von den angegebenen Seiten geholt:

- Summe der Innenwinkel im Dreieck (Seite 13),
- Dreiecksungleichungen (Seite 14),
- Satz des Pythagoras (Seite 16)
- Höhensatz (Seite 18).
- Sinussatz (Seite 22),
- Kosinussatz (Seite 23).
- Heronische Formel (Seite 25)
- Die 3 Höhen des Dreiecks (Seite 22) werden aus dem Flächeninhalt und den Seitenlängen berechnet.
- Der **Umkreisradius *r*** (Seite 23) ergibt sich aus der halben Seitenlänge dividiert durch den Sinus des gegenüberliegenden Winkels.
- Der **Inkreisradius** ρ (Seite 24) wird aus Flächeninhalt ***A*** geteilt durch den halben Umfang berechnet: $\rho = 2*A/U$.

Mit jedem der vier Programme **SSS, SAA, SAS** und **ASA** werden aus den gegebenen Bestimmungsstücken die fehlenden Werte berechnet. Wir verwenden die Bezeichnungen nach Bild 19.

Bild 19: Dreieck mit allen Bestimmungsstücken und den 3 Höhen



Am Schluss der Berechnung sind folgende 14 Werte verfügbar:

a, b, c	Seitenlängen,
α, β, γ	Eckwinkel
A	Flächeninhalt,
U	Umfang,
s	halber Umfang,
h_a, h_b, h_c	Höhen
r	Umkreisradius
ρ	Inkreisradius

9.2.1. SSS – Drei Seitenlängen

Gegeben sind die drei Seitenlängen ***a*, *b*** und ***c*** eines Dreiecks.

Daraus werden mit dem umgestellten Kosinussatz (Formel 41, Formel 42, Formel 43) die drei Eckwinkel α, β und γ und mit der Heronischen Formel (Formel 52) der Flächeninhalt ***A*** berechnet.

Formel 55: Eckwinkel bei Ecke A

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Formel 56: Eckwinkel bei Ecke B

$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

Formel 57: Eckwinkel bei Ecke C

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Formel 58: Flächeninhalt

$$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Formel 59: Umfang

$$U = a + b + c$$

Formel 60: Halber Umfang

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Formel 61: Höhe auf a

$$h_a = \frac{2 \cdot A}{a}$$

Formel 62: Höhe auf b

$$h_b = \frac{2 \cdot A}{b}$$

Formel 63: Höhe auf c

$$h_c = \frac{2 \cdot A}{c}$$

Formel 64: Umkreisradius r

$$r = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot A}$$

Formel 65: Inkreisradius ρ

$$\rho = \frac{A}{s}$$

9.2.2. ASA – Eine Seitenlänge und zwei anliegende Winkel

Gegeben sind Seitenlänge $\boldsymbol{a}$ und die beiden anliegenden Winkel β und γ.

Den fehlenden Winkel α berechnen wir aus der Winkelsumme des Dreiecks:

Formel 66: Fehlender Winkel α

$$\boxed{\alpha = 180° - \beta - \gamma}$$

Die anderen beiden Seitenlängen ergeben sich aus dem Sinussatz für das allgemeine Dreieck:

Formel 67: Sinussatz allgemein

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\sin\alpha} = \frac{\boldsymbol{b}}{\sin\beta} = \frac{\boldsymbol{c}}{\sin\gamma}}.$$

Daraus ergeben sich die beiden Seitenlängen:

Formel 68: Seitenlänge b

$$\boxed{\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}}$$ und

Formel 69: Seitenlänge c

$$\boxed{\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}}.$$

Damit haben wir alle Winkel und alle Seitenlängen und können für die Berechnung das Schema SSS ab Formel 58 verwenden.

9.2.3. SAA – Eine Seitenlänge und zwei Winkel

Gegeben sind Seitenlänge $\boldsymbol{a}$, Winkel γ und Winkel α.

Der fehlende Winkel β wird aus der Winkelsumme im Dreieck berechnet:

Formel 70: Fehlender Winkel β

$$\boxed{\beta = 180° - \alpha - \gamma}$$

Nun haben wir die Seite $\boldsymbol{a}$ und alle Winkel. Damit können wir das Schema ASA benutzen.

9.2.4. SAS – Zwei Seitenlängen und dazwischenliegender Winkel

Gegeben sind die Seitenlängen $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und der dazwischenliegende Winkel γ.

Wir berechnen die Seitenlänge $\boldsymbol{c}$ nach Formel 42:

$$\boxed{\boldsymbol{c}^2 = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2 \cdot \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \cos\gamma}.$$

Nun haben wir alle drei Seitenlängen und können daraus nach Schema **SSS** alle weiteren Werte berechnen.

9.3. Die Taschenrechnerprogramme für das Dreieck

9.3.1. Voraussetzungen

Für die folgenden Ausführungen wird vorausgesetzt, dass sich der Leser mit der Handhabung und den Möglichkeiten eines programmierbaren wissenschaftlichen HP-Taschenrechners auskennt. Dazu steht neben den Original-HP-Handbüchern auch das Handbuch des Verfassers „Wissenschaftliche HP-Taschenrechner im praktischen Einsatz“ (siehe Lit. [Praxl3]) zur Verfügung.

Die auf folgenden Bildern gezeigten Bildschirmabzüge wurden auf einem HP 50g hergestellt.

9.3.2. Flag- bzw. Moduseinstellungen am Taschenrechner

Um bei der Berechnung Fehlermeldungen zu vermeiden, sollte man einstellen:

Zuerst den Modus auf RPN stellen:
Mit **[MODE]** Formular "CALCULATOR MODES" aufrufen und dort die erste Zeile "Operating Mode .. " auf RPN stellen.

Dann die anderen Flags einstellen:

(Flag -2) = 1 (numerisches Ergebnis bei Konstanten)
(Flag -3) = 1 (numerisches Ergebnis bei Funktionen)
(Flag -20) = 0 ("Underflow" ergibt Null)
(Flag -21) = 0 ("Overflow" ergibt Anzeige: ±9E499)
(Flag -22) = 1 ("Unendlich" ergibt Anzeige: ±9E499)
(Flag -90) = 1 (CHOOSE-Minifont)
(Flag -105) = 1 (Näherungsmodus = reelle Zahlen)
gewünschtes Winkelformat: DEG, GRAD oder RAD.

Dazu werden **im RPN-Modus** folgende Befehle eingegeben: **{-2 -3 -22 -90 -105} SF {-20 -21 } CF**
Mit dem Befehl **DEG** wird als Winkelformat **Grad (°)** eingestellt .

Die Programme werden als Programmverzeichnis **DREIECK.txt** auf der Praxelius-Homepage zur Verfügung gestellt.

Dieses Programmverzeichnis kann zum PC heruntergeladen werden und per Verbindungssoftware vom PC auf den HP-Taschenrechner übertragen werden.

Bild 20 und Bild 21 zeigen die Menüs des Verzeichnisses DREIECK.

Bild 20: Menüpunkte 1 bis 6

Bild 21: Menüpunkte 7 bis 11

Das Verzeichnis DREIECK enthält ein Hauptprogramm **DREIB** (Dreiecke berechnen), das ein Auswahlmenü bietet, über das das Auswahlmenü der Ergebnisanzeige **ERGEB,** die vier Berechnungsprogramme **SSS, SAA, SAS, ASA**, das Auswahlmenü der Variablenbezeichnungen **VARBEZ** und die Grafikausgaben **DRPL** und **BEZ** aufgerufen werden können.

Das Programm **WFMT** ist ein Hilfsprogramm, das innerhalb der Berechnungsprogramme das über die Flags eingestellte Winkelformat feststellt und die entsprechende Winkelsumme des Dreiecks in den Stack stellt:

- bei DEG: 180
- bei GRD: 200
- bei RAD: 3,14159265359

Der Indikator in der linken oberen Ecke des Bildschirms zeigt die aktuelle Einstellung an. Die Eingaben der Winkelwerte müssen im eingestellten Format erfolgen**.** Jedes der Berechnungsprogramme (**SSS, ASA, SAS, SAA)** kann auch separat aufgerufen werden und liefert alle Ergebnisse.

9.3.3. Auswahlmenü DREIB

Dieses Auswahlmenü enthält 9 Menüpunkte:

Über die ersten vier Menüpunkte können die Berechnungsprogramme **SSS, ASA, SAS** und **SAA** aufgerufen werden. Die restlichen Menüpunkte sind mit ***Ergebnisanzeige***, ***Ergebnisplot***[11], Grafik mit den ***Bezeichnungen***, ***Variableninfo*** und Angaben über den ***Autor*** belegt.

Nun kann die Eingabe der gegebenen Werte beginnen.

Nach dem Aufruf eines der vier Programme **SSS, ASA, SAS** und **SAA** erfolgt die Abfrage der benötigten Angaben über Seitenlängen und Winkel über den **INPUT**-Befehl. Die Winkel müssen in dem in der linken oberen Bildschirmecke sichtbaren Winkelformat erfolgen. In den hier gezeigten Bildern ist der Indikator **DEG**, also Grad (°), in der linken oberen Ecke sichtbar.

Bild 22: Auswahlmenü mit Punkten 1 bis 8

Bild 23: Auswahlmenü mit Punkten 2 bis 9

Jeder der drei erforderlichen Eingabewerte ist mit **[ENTER**] abzuschließen.

Nach dem dritten **[ENTER]** zeigt der Bildschirm so lange die Eingaben, bis das Ergebnis berechnet ist. Nach einiger Zeit erscheint eine Messagebox. Z.B. lautet die Meldung nach der SSS-Berechnung: "SSS-Berechnung: Ergebnisse siehe Menü!"

Die **Ergebnisanzeige** erfolgt über die "Ergebnisanzeige" des Auswahlmenüs DREIB oder direkt über das Programm **ERGEB** im Arbeitsverzeichnis. Alle angezeigten Werte sind auch in aktuellen Verzeichnis als Variablen vorhanden (siehe unten).

Der Menüpunkt **Ergebnisplot** in DREIB startet das Programm **DRPL** (=Dreieckplot).

DRPL ist ein Programm zur Plottausgabe des berechneten Dreiecks. Es kann nur aufgerufen werden, wenn die Berechnung eines Dreiecks bereits erfolgt ist und die Ergebniswerte als Variable im aktuellen Verzeichnis vorhanden sind. Liegen keine Ergebniswerte zum Ausplotten vor, wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

---

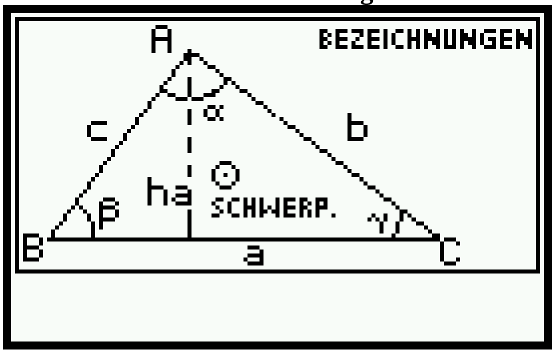
[11] „Plot" ist ein feststehender Begriff aus dem Englischen und bezeichnet eine automatisch hergestellte grafische Darstellung. Die beiden Begriffe „Plottausgabe" und „Plottvorgang" stammen von „plotten" und „Plotter" und sind mit „tt" zu schreiben.

Der Plottvorgang fragt um die Erlaubnis zur Einstellung des Complex-Modus, die man mit YES gewähren muss. Der Dreieckplot zeigt die Form des berechneten Dreiecks. Falls noch keine Berechnung vorausgegangen war und deshalb keine Werte vorliegen, wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

Alle Ergebnisse und alle per Programm erzeugten Variablen kann man mit der Menüfunktion **LOE** aus dem aktuellen Verzeichnis löschen.

Die üblichen Bezeichnungen des Dreiecks (siehe Bild 24) sind in der Grafik **BEZ** hinterlegt, diese kann über den Menüpunkt **Bezeichnungen** angezeigt werden. Die Grafik wurde auf dem HP 49G programmiert, dessen Bildschirm kleiner ist.

Bild 24: Grafik mit Bezeichnungen



Nach den üblichen Definitionen liegen den Seiten ***a***, ***b*** und ***c*** die Eckpunkte A, B und C mit den Winkeln α, β und γ gegenüber.

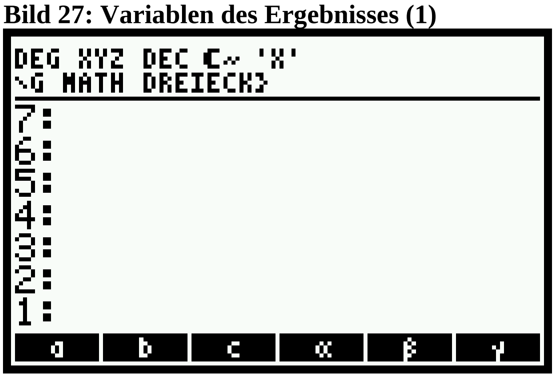
Der Menüpunkt **Variablen-Info** zeigt die Bedeutung aller Variablen in einem Auswahlmenü.

Bild 25: Variableninfos (1)

Bild 26: Variableninfos (2)

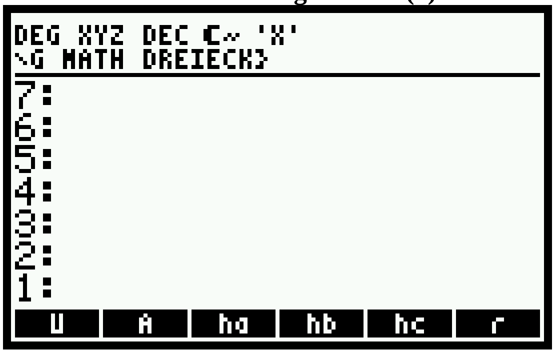
9.3.4. *Ergebnisse*

Die folgenden Bilder zeigen die Ergebnisvariablen, die im aktuellen Verzeichnis hinterlegt werden und das Auswahlmenü mit den Ergebniswerten.

Drei Seitenlängen, drei Winkel	**Bild 27: Variablen des Ergebnisses (1)** 

Umfang ***U***
Flächeninhalt ***A***
Höhe h_a auf Seite ***a***
Höhe h_b auf Seite ***b***
Höhe h_c auf Seite ***c***
Umkreisradius ***r*** des Dreiecks

Bild 28: Variablen des Ergebnisses (2)



Inkreisradius ρ des Dreiecks

Löschtaste **LOE** für alle Ergebnisvariablen.

Die restlichen Menüfelder
DREIB, ERGEB, SSS und**, SAA** sind die Programme, die ebenfalls im aktuellen Verzeichnis **DREIECK** gespeichert sind.

Bild 29: Variablen des Ergebnisses (3)

Bild 30: Ergebniswerte (1)

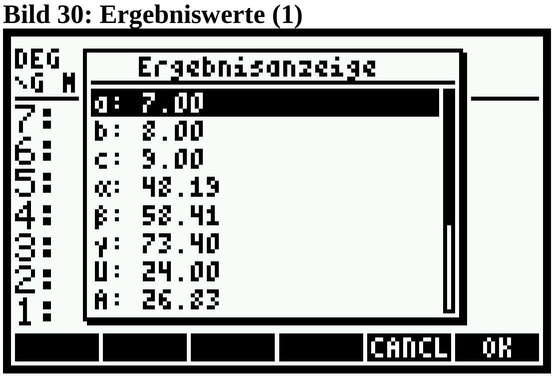
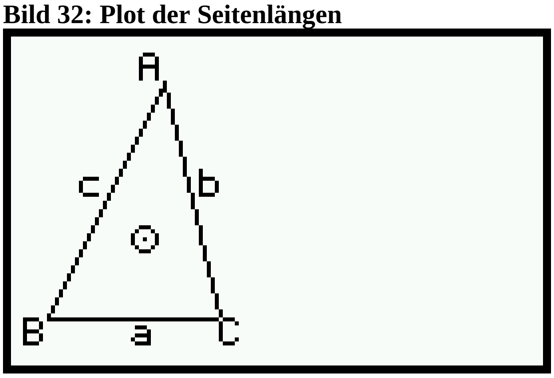


Bild 31: Ergebniswerte (2)

Bild 32: Plot der Seitenlängen



10. Anhang

10.1. Literatur

Bezeichnung (Lit.)	Autor	Beitrag, Buch, Fundstelle
[Euklid]	*Thaer, Clemens*	**Die Elemente** Die 13 Bücher des *Euklid*, zusammengefasst in einem Buch. Nachdruck der Übersetzung von 1933 – 1937, Leipzig, 1975, herausgegeben von der Wissenschaftlichen Buchgesellschaft, Darmstadt ISBN 3-534-01488-X
[Westrich]	*Westrich, Fritz*	**Sammlung mathematischer Formeln** 1957, 16. Auflage Lindauer Verlag, München
[Bartsch]	*Bartsch, Hans-Jochen*	**Mathematische Formeln** 1971, 10. Auflage Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, Köln
[Bronstein]	*Bronstein, I. N* *Semendjajew,K. A.*	**Taschenbuch der Mathematik** 1989, 24. Auflage Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt/Main ISBN 3-87144-492-8
[MathHb]	*Gellert, Walter*	**Handbuch der Mathematik** 1972, Lizenzausgabe für Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, Köln
[Kropp]	*Kropp, Gerhard*	**Vorlesungen über Geschichte der Mathematik** 1967 BI-Hochschultaschenbuch Nr. 413/413a Bibliographisches Institut Mannheim/Zürich
[Praxl1]	*Praxl, Otto*	**Kreisformeln**, Formelsammlung PDF-Dokument 2013, siehe www.praxelius.de
[Praxl2]	*Praxl, Otto*	**Digitale geometrische Modelle (DGM),** Abhandlung über digitale Geländemodelle, PDF-Dokument 2011, siehe www.praxelius.de (Lesekennwort: *Praxelius.de*)
[Praxl3]	*Praxl, Otto*	**Wissenschaftliche HP-Taschenrechner im praktischen Einsatz** Ein ausführliches Handbuch nicht nur für HP-Anfänger. Grundlagen, Rechnerfunktionen, Programmierung, Praxisanwendungen, Beispiel-Programme. GRIN Verlag, 2013, ISBN 978-3-656-18641-0, Preis 14,99 €

10.2. Das griechische Alphabet

Tabelle 1: Griechisches Alphabet

Groß	klein	Name	Aussprache
Α	α	Alfa	*a*
Β	β	Beta	*b*
Γ	γ	Gamma	*g*
Δ	δ	Delta	*d*
Ε	ε	Epsilon	*e*
Ζ	ζ	Zeta	*z*
Η	η	Eta	*ä*
Θ	θ, ϑ	Theta	*th*
Ι	ι	Iota	*i*
Κ	κ, ϰ	Kappa	*k*
Λ	λ	Lambda	*l*
Μ	μ	My	*m*
Ν	ν	Ny	*n*
Ξ	ξ	Xi	*x*
Ο	ο	Omikron	*o (kurz)*
Π	π	Pi	*p*
Ρ	ρ	Rho	*r*
Σ	σ, ς	Sigma	*s*
Τ	τ	Tau	*t*
Υ	υ	Ypsilon	*ü*
Φ	φ, ϕ	Phi	*ph*
Χ	χ	Chi	*ch*
Ψ	ψ	Psi	*ps*
Ω	ω	Omega	*o (lang)*

θ, ϑ stehen gleichwertig nebeneinander,
σ kommt innerhalb des Wortes vor,
ς steht am Ende eines Wortes.
φ steht in griechischen Texten,
ϕ kommt seltener vor.

10.3. Verzeichnis der Formeln

10.4. Verzeichnis der Bilder

11. Sachwortverzeichnis (Index)

U

V

W

Z