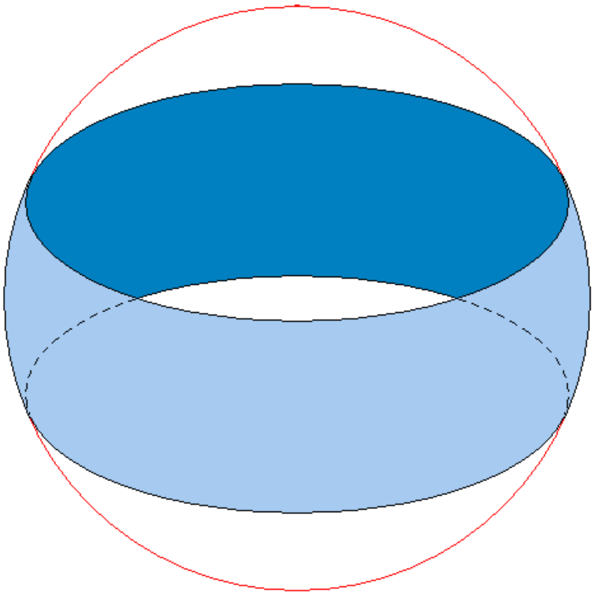
Der Kugelring

Verfasser: Praxelius

Beschreibung des Kugelrings und Herleitung der Formeln



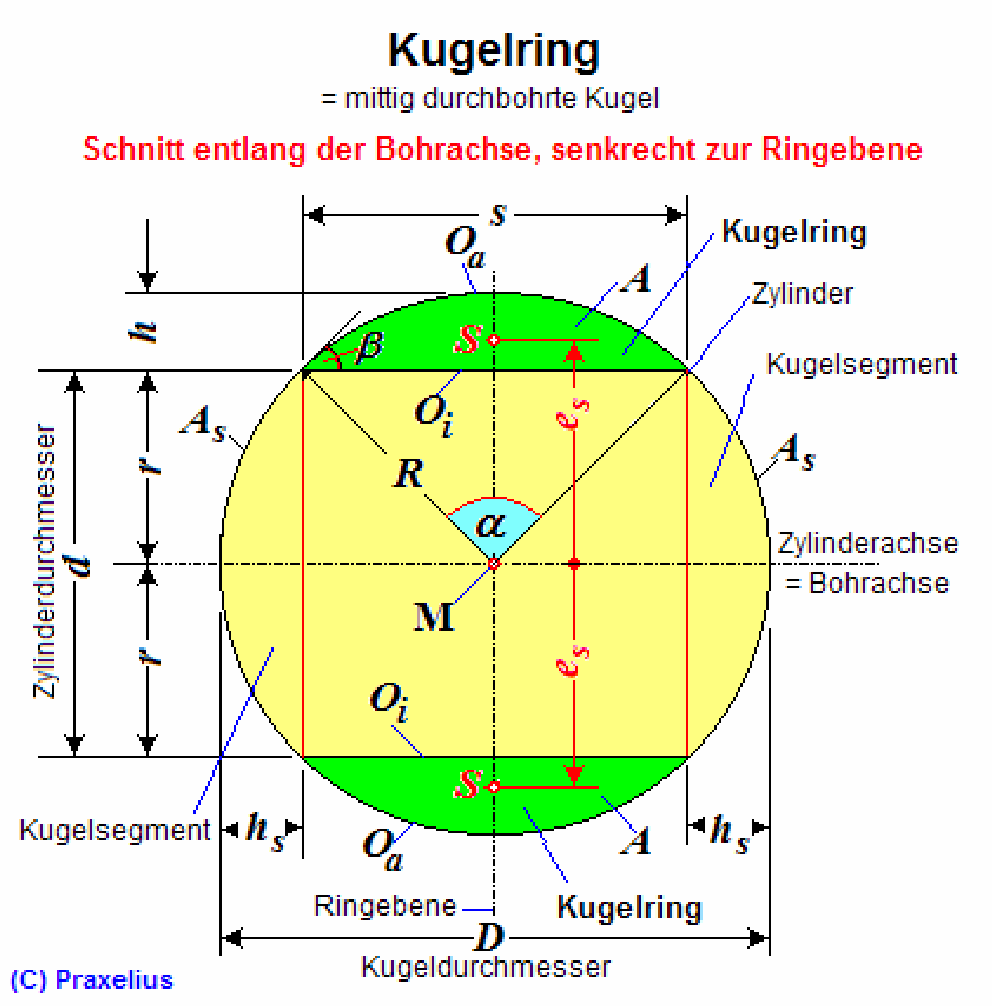
PDF-Dokument: Kugelring.pdf

KR-8250-006

Diesen Beitrag hat der Verfasser in gekürzter Form der deutschen Wikipedia zur Verfügung gestellt.

Inhaltsübersicht

Geometrische Zusammenhänge



Definition des Kugelrings

Der Kugelring ist ein Teil einer Kugel. Ein Kugelring entsteht, wenn man eine Kugel mittig zylindrisch durchbohrt.

Mathematisch gesehen ist es eine Durchdringung von Kugel und Zylinder, wobei die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht und das vom Zylinder verdrängte Kugelvolumen (in der Zeichnung gelb dargestellt) subtrahiert wird.

Von der Kugel bleibt dann nur ein Ring übrig, dessen Querschnitt (in der Zeichnung grün markiert) aus zwei Kreissegmenten besteht.

Bezeichnungen und Formeln

Die geometrischen Zusammenhänge entnehme man der obigen Zeichnung.

Bezeichnung, Formel	**Bedeutung**
M	Kugelmittelpunkt,
$\boldsymbol{S}$	Flächenschwerpunkt des Ringquerschnitts $\boldsymbol{A}$,
$\boldsymbol{R}$	Kugelradius = Außenradius des Kugelrings,

$\boldsymbol{D} = 2 \cdot \boldsymbol{R}$ Kugeldurchmesser,

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{h}$ Bohrlochradius = Zylinderradius = Innenradius des Kugelrings,

$\boldsymbol{d} = 2 \cdot \boldsymbol{r}$ Bohrlochdurchmesser = Zylinderdurchmesser,

$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} - \sqrt{\boldsymbol{R}^2 - \left(\frac{\boldsymbol{s}}{2}\right)^2}$ Höhe des Kreissegments = Dicke des Rings,

$\boldsymbol{s} = 2 \cdot \sqrt{\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{r}^2}$ Ringbreite = Sehne des Kreissegments,

$\boldsymbol{h}_s = \boldsymbol{R} - \frac{\boldsymbol{s}}{2}$ Höhe des Kugelsegment am Ende der Bohrung,

$\boldsymbol{V}_s = \frac{\pi \cdot \boldsymbol{h}_s^2}{3} \cdot (3 \cdot \boldsymbol{R} - \boldsymbol{h}_s)$ Volumen des Kugelsegments am Ende der Bohrung,

$\boldsymbol{V}_z = \pi \cdot \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{r}^2$ Volumen des Zylinders mit Radius $\boldsymbol{r}$ und Länge $\boldsymbol{s}$,

$\boldsymbol{V}_k = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \boldsymbol{R}^3 = \frac{\pi \cdot \boldsymbol{D}^3}{6}$ Volumen der zu durchbohrenden Kugel mit Radius $\boldsymbol{R}$,

$\boldsymbol{V}_r = \frac{\pi \cdot \boldsymbol{s}^3}{6}$ Volumen des Kugelrings mit der Breite $\boldsymbol{s}$,

$\frac{\boldsymbol{V}_r}{\boldsymbol{V}_k} = \frac{\boldsymbol{s}^3}{\boldsymbol{D}^3}$ Verhältnis der Volumina von Kugelring und Kugel,

α Zentriwinkel der Ringaußenfläche,

$\widehat{\alpha} = 2 \cdot \mathbf{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)$ Bogenmaß des Zentriwinkels α,

$\beta = \frac{\alpha}{2}$ Flankenwinkel des Kugelrings bezogen auf die Sehne $\boldsymbol{s}$,

$\boldsymbol{e}_s = \frac{\boldsymbol{s}^3}{12 \cdot \boldsymbol{A}}$ Schwerpunktabstand des Kreissegments vom Kreismittelpunkt,

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^2 \cdot \frac{\widehat{\alpha}}{2} - \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{s}}{2}$ Flächeninhalt des Kugelringquerschnitts,

$\boldsymbol{A}_s = 2 \cdot \pi \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{h}_s$ Gewölbte Oberfläche des Kugelsegments = Kugelkappe[1],

$\boldsymbol{A}_k = 4 \cdot \pi \cdot \boldsymbol{R}^2$ Oberfläche der (undurchbohrten) Kugel,

[1] Die gewölbte Außenfläche des Kugelsegments nennt man Kugelkappe.

$O_a = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot s$ Ringaußenoberfläche = Mantelfläche der Kugelschicht[2],

$O_i = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s$ Ringinnenoberfläche,

$O_r = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot (R + r)$ Gesamtoberfläche des Kugelrings.

Herleitung der Formel für das Kugelring-Volumen V_r

Die Formel für das Volumen V_r des Kugelrings kann man nach mehreren Methoden herleiten. Es werden drei Möglichkeiten gezeigt.

Herleitung von V_r als Rotationskörper

Der Kugelring ist ein Rotationskörper, der aus der Rotation des Kreissegments A um die Zylinderachse entsteht. Das Volumen V_r des Kugelrings berechnet sich aus der Kreissegmentfläche A und dem Weg $2 \cdot \pi \cdot e_s$ des Flächenschwerpunkts um die Zylinderachse:

$$V_r = 2 \cdot A \cdot \pi \cdot e_s$$

Die Formel für den Schwerpunktabstand e_s der Kreissegmentfläche A vom Mittelpunkt **M** des Kreises (= Mittelpunkt der Kugel) entnimmt man einer Formelsammlung[3] oder man leitet sie selber her (aus dem statischen Flächenmoment und dem Flächeninhalt des Kreissegments; darauf wird aber hier verzichtet).

$$e_s = \frac{s^3}{12 \cdot A}$$

Die Kreissegmentfläche A berechnet sich aus dem Kreissektor abzüglich des inneren Dreiecks:

$$A = R^2 \cdot \frac{\hat{\alpha}}{2} - r \cdot \frac{s}{2},$$

wobei $\frac{\hat{\alpha}}{2} = \arccos\left(\frac{r}{R}\right)$ ist.

Die Kreissegmentfläche A ist zur Berechnung des Volumens V_r aber nicht nötig, denn sie kürzt sich heraus:

$$V_r = 2 \cdot A \cdot \pi \cdot \frac{s^3}{12 \cdot A} = \frac{\pi \cdot s^3}{6}$$

$$\boxed{V_r = \frac{\pi \cdot s^3}{6}}$$

---

[2] Eine Kugelschicht (Kugelzone) entsteht zwischen zwei parallelen Schnitten durch eine Kugel .

[3] siehe Praxelius-Formelsammlung „Kreisformeln“ (Dokument Kreisformeln.pdf auf www.praxelius.de).

Herleitung von V_r aus Kugelvolumen minus Bohrung

Man kann das Volumen V_r des Kugelrings auch aus dem Kugelvolumen V_k berechnen, von dem das Bohrvolumen (zwei Kugelsegmente + Zylinder) abgezogen wird.

Kugelvolumen: $V_k = 4 \cdot \pi \cdot R^3/3$

Das Kugelsegment ist durch die Höhe $h_s = R - (s/2)$ und den Kugelradius R eindeutig bestimmt. Die Formel für das Volumen V_s des Kugelsegments entnimmt man einer Formelsammlung:

$$V_s = \pi \cdot h_s^2 \cdot (3 \cdot R - h_s)/3$$

Der auszubohrende Zylinder der Länge s hat das Volumen

$$V_z = s \cdot \pi \cdot r^2$$

Als Volumen des Kugelrings ergibt sich dann:

$$V_r = V_k - 2 \cdot V_s - V_z = 4 \cdot \pi \cdot R^3/3 - 2 \cdot \pi \cdot h_s^2 \cdot (3 \cdot R - h_s)/3 - s \cdot \pi \cdot r^2$$

Nach mehreren Umformungen und Einsetzen von $h_s = R - (s/2)$ und $R^2 - r^2 = (s/2)^2$ erhält man wieder die schon oben angegebene Formel für V_r.

Herleitung von V_r aus Kugelschichtvolumen minus Bohrung

Am einfachsten lässt sich die Formel für das Volumen V_r des Kugelrings aus der Kugelschicht mit der Dicke s, die mittig zum Kugelmittelpunkt liegt, herleiten. Das Volumen der Kugelschicht minus Zylinder ist:

$$V_r = \pi \cdot s \cdot (3r^2 + 3r^2 + s^2)/6 - \pi \cdot s \cdot r^2 = \pi \cdot s \cdot (3r^2 + 3r^2 + s^2 - 6r^2)/6 = \pi \cdot s \cdot s^2/6 = \pi \cdot s^3/6.$$

Wieder ergibt sich die schon oben hergeleitete Formel für V_r.

Lehrsatz für alle Kugelringe

Aus der Formel $V_r = \frac{\pi \cdot s^3}{6}$ für das Volumen des Kugelrings ergibt sich der Lehrsatz:

Alle Kugelringe mit gleicher Breite s haben das gleiche Volumen V_r.

Das Volumen V_r eines beliebig großen Kugelrings wird allein durch die Ringbreite s bestimmt.

Praktische Bedeutung.
Gleiches Volumen bedeutet bei gleichem Material auch gleiches Gewicht und gleiche Masse. Kugelringe mit gleicher Breite und aus gleichem Material sind also alle gleich schwer.

Probe:

Zur Probe der Richtigkeit dieses Satzes nehme man eine Kugel mit einer Bohrung **r = 0** (unechter Kugelring). Die Ringbreite s ist dann der Durchmesser der Kugel.

$$V_r = \frac{\pi \cdot s^3}{6} = \frac{\pi \cdot (2 \cdot R)^3}{6} = \frac{8}{6} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$$

Die Probe mit der Kugelringformel ergibt also das Kugelvolumen. Für den Kugelring gilt stillschweigend, dass die Ringbreite s den Kugeldurchmesser D nicht überschreiten kann.

Da alle Kugelringe mit der Ringbreite $\boldsymbol{s}$ gleiches Volumen $\boldsymbol{V_r}$ haben, kann man aus $\boldsymbol{s}$ für einen Kugelring mit bestimmtem Innendurchmesser $\boldsymbol{d}$ (Bohrung) den Kugeldurchmesser $\boldsymbol{D}$ der dazu gehörigen Kugel berechnen.

Beispiel

Ein Kugelring wurde aus der **Kugel 1** mit $\boldsymbol{D_1 = 2 \times R_1 = 20}$ **mm** hergestellt, die eine Bohrung von $\boldsymbol{d_1 = 2 \times r_1 = 12}$ **mm** erhielt.

Aufgabe:

Wie groß muss der Durchmesser $\boldsymbol{D_2} = \boldsymbol{2 \times R_2}$ einer **Kugel 2** sein, aus der ein Kugelring mit einer Bohrung von $\boldsymbol{d_2 = 2 \times r_2 = 30}$ **mm** hergestellt wird, der das gleiche Volumen $\boldsymbol{V_r}$ und die gleiche Ringbreite $\boldsymbol{s}$ aufweist?

Lösung:

Zuerst muss die Ringbreite $\boldsymbol{s}$ gefunden werden. Diese wird aus $\boldsymbol{R_1 = 10}$ **mm** der Kugel 1 und $\boldsymbol{r_1 = 6}$ **mm** berechnet.
Da $\boldsymbol{R^2 - r^2 = (s/2)^2}$ gilt, ergibt sich aus $\boldsymbol{R_1^2 - r_1^2 = 10^2 - 6^2 = 8^2 = (s/2)^2}$.

Daraus folgt für Kugelring 1:

$\boldsymbol{s = 16}$ **mm**
$\boldsymbol{h = R_1 - r_1 = 10 - 6 = 4}$ **mm.**

Wenn man die Ringbreite $\boldsymbol{s}$ nicht wissen will, kann man sofort rechnen:
$\boldsymbol{R_1^2 - r_1^2 = R_2^2 - r_2^2}$ **,** weil $\boldsymbol{s/2}$ und damit $\boldsymbol{s}$ gleichbleiben soll.
Außer $\boldsymbol{R_2}$ sind alle Werte bekannt.
$\boldsymbol{R_2^2 = R_1^2 - r_1^2 + r_2^2 = 10^2 - 6^2 + 15^2 = 100 - 36 + 225 = 289 = 17^2}$.
$\boldsymbol{R_2 = 17}$ **mm**, folglich $\boldsymbol{D_2 = 34}$ **mm.**

Daraus folgt für Kugelring 2:

$\boldsymbol{s = 16}$ **mm**
$\boldsymbol{h = R_2 - r_2 = 17 - 15 = 2}$ **mm.**

Das Volumen beider Kugelringe ist $\boldsymbol{V_r} = p \cdot \boldsymbol{16^3/6 = 2144.661}$ **mm^3 = 2.144661 cm^3.**
Sind beide Ringe aus Gold, so hat jeder von ihnen die Masse 2.144661 cm^3 · 19.3 g/cm^3 = 41.39 g.

Verhältnis der Volumina von Kugelring und Kugel

Das Verhältnis der Volumina von Kugelring und Kugel wird nur durch die Ringbreite $\boldsymbol{s}$ und den Kugeldurchmesser $\boldsymbol{D}$ bestimmt:

Kugelring: $\boldsymbol{V_r = s^3 \times p/6}$

Kugel: $\boldsymbol{V_k = 4 \times p \times R^3/3 = D^3 \times p \times /6}$

Daraus ergibt sich:

$$\boxed{\frac{V_r}{V_k} = \frac{s^3}{D^3}}$$

Diese Formel ermöglicht die Beantwortung z. B. der Frage, welche Maße ein Kugelring hat, wenn die Hälfte des Kugelvolumens ausgebohrt wird.

Flankenwinkel der Ringkante

Je größer der Kugelring, desto kleiner ist der Flankenwinkel β der Ringkante, der auf die Sehne ***s*** bezogen ist.

$$\boxed{\widehat{\beta} = \mathbf{arccos}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{R}}\right)}$$

Der Arcuscosinus (**arccos**) kann bei Taschenrechnern nicht nur im Bogenmaß, sondern gleich in Altgrad umgerechnet ausgegeben werden (Taschenrechnereinstellung).

Für die Kugelringe aus obiger Aufgabe ergibt sich:

Kugelring 1: β = **arccos (6/10) = 53.13°**
Kugelring 2: β = **arccos (15/17) = 28.07°,**

Oberfläche O_r des Kugelrings

Der Vollständigkeit halber werden noch die Oberflächen, also Ringaußenfläche und Ringinnenfläche, angegeben.

Berechnung der Ringaußenfläche O_a

Diese Fläche kann mit der Formel für die Kugelschicht (Kugelzone) berechnet werden (siehe Formelsammlung).

$$\boxed{O_a = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot s}$$

Die zweite Möglichkeit ist, die beiden Kugelkappen von der Kugeloberfläche zu subtrahieren.

$$O_a = 4 \cdot \pi \cdot R^2 - 2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h_s = 4 \cdot \pi \cdot R^2 - 4 \cdot \pi \cdot R \cdot h_s$$

$$= 4 \cdot \pi \cdot R \cdot (R - h_s) = 4 \cdot \pi \cdot R \cdot s/2 = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot s$$

Berechnung der Ringinnenfläche O_i

$$\boxed{O_i = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s}$$

Gesamtoberfläche O_r des Kugelrings

$$\boxed{O_r = O_a + O_i = 2 \cdot \pi \cdot s \cdot (R + r)}$$