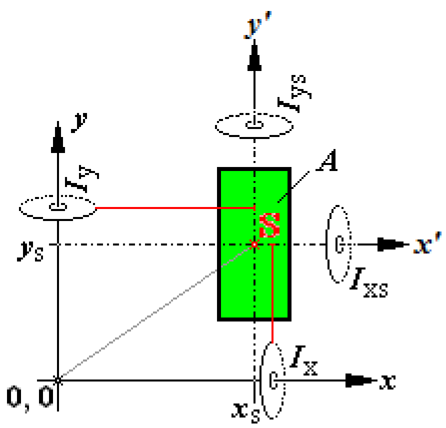
Otto Praxl

Querschnittswerte für statische Querschnitte

Der Beitrag zeigt die Berechnung von Querschnittswerten mit den programmierbaren wissenschaftlichen HP-Taschenrechnern HP 49G, HP 49g+, HP 50G.

Die Berechnung der Querschnittswerte ist ein Paradebeispiel für den Einsatz der Listenverarbeitung und der Vektorrechnung, die bei den HP-Taschenrechnern sehr viel Programmierarbeit sparen.



Impressum

Verfasser:

Otto Praxl.

Internetseite:

www.praxelius.de

Urheberrecht:

Veröffentlichung

Das Dokument wird als verschlüsseltes PDF-Dokument auf der Homepage *www.praxelius.de* veröffentlicht. Es darf nicht außerhalb dieser Homepage veröffentlicht werden.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007)**:**

Otto Praxl

Für das Lesen mit einem PDF-Reader wurden alle Übersichten, Verzeichnisse und die Querverweise im Text mit Hyperlinks unterlegt, die nach Mausklick zur gewünschten Stelle im Text verzweigen und nach Klick auf die Schaltfläche „Zurück zur vorigen Seitenansicht“ wieder zur ursprünglichen Stelle im Text zurückführen.

Rechtschreibung:

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.
Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

Haftungsausschluss:

Im Text, in den Programmen und in den Grafiken können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

Bildnachweise:

Alle Zeichnungen stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 25.01.2012

Bearbeitungskennzeichen: QSW-52546-008

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Stabförmige Bauteile haben einen bestimmten Querschnitt. Bei der statischen Berechnung zur Bemessung solcher Bauteile braucht man die Querschnittswerte (auch Querschnittskennwerte genannt).

Die wichtigsten Querschnittswerte sind:

- die Lage des Schwerpunktes,
- die Querschnittsfläche und
- die Trägheitsmomente
- die Trägheitsradien
- Winkel zwischen Haupt- und Schwerachsen.

Für einfache Querschnittsformen sind die Werte aus Tabellen ablesbar oder mit einfachen Formeln schnell auszurechnen. Die Werte von kompliziert zusammengesetzten Querschnitten (z. B. Hohlkastenquerschnitte bei Brücken) dagegen können wegen der vielfältigen Formen nicht in Tabellen aufgelistet werden. Sie müssen für den jeweils vorliegenden Querschnitt separat berechnet werden. Dazu müssen die koordinatenmäßig festgelegten unregelmäßigen Umrisspolygone erfasst und eingegeben werden. Daraus werden dann per Rechnerprogramm nach den Berechnungsformeln die Querschnittswerte berechnet.

Mit einem programmierbaren wissenschaftlichen Grafik-Taschenrechner[1] von HP ist es sehr einfach, solche Werte schnell zu berechnen, weil Listenverarbeitung und Vektorrechnung voll unterstützt werden. Die Koordinaten der Umrisseckpunkte werden in ein Listenobjekt unter einem Variablennamen abgespeichert. Die Liste der Eingabewerte kann durch Eintippen über die HP-Tastatur oder auch auf dem PC erzeugt und dann auf den HP-Taschenrechner in eine Variable übernommen werden. Das HP-Programm berechnet dann daraus die Querschnittswerte und zeigt den Querschnitt zusätzlich als geplottete Zeichnung auf dem Bildschirm des Taschenrechners.

In diesem Beitrag werden die Grundlagen und die Programmierung der Berechnung von Querschnittswerten dargestellt und fertige Programme zur Verfügung gestellt.

2 Verfahrensbeschreibung

Dipl.-Ing. Hermann Fleßner hat im Jahr 1962 in seiner Abhandlung *Ein Beitrag zur Ermittlung von Querschnittswerten mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen* (siehe Lit. [Fleßner]) ein Verfahren beschrieben und für Computeranwendungen aufbereitet, das auf dem *Gaußschen Integralsatz der Ebene* aufbaut.

Hewlett Packard hat dieses Verfahren 1970 für die bautechnischen Programme des Rechners HP 9100B verwendet. Der HP 9100B war als Tischrechner konzipiert und darf als Vorläufer der späteren programmierbaren HP-Taschenrechner angesehen werden.

Das Verfahren nach *Fleßner* wird hier ausführlich beschrieben und durch eigene Hinweise ergänzt.

Das angebotene HP-Programmsystem **QSWDIR** (siehe 4.8 auf Seite 20) arbeitet nach diesem Verfahren.

[1] Verfügbar sind die Modelle HP 49G, HP 49g+ und HP 50G.

2.1 Mathematische Grundlagen des Verfahrens

Theorie ist, wenn man genau weiß wie es geht, und nichts funktioniert.
Praxis ist, wenn alles funktioniert, und man weiß nicht warum.

Ein gewisses Maß an Theorie schadet der Praxis nicht, man soll ja auch bei der Anwendung des Programms verstehen, was man da berechnet und wie der HP-Taschenrechner das macht. Die Theorie der Flächenberechnung wird etwas ausführlicher behandelt, weil diese Formeln auch in der Geodäsie und in anderen Bereichen angewandt werden können. Die Formeln für die anderen Querschnittswerte werden nicht hergeleitet, weil der professionelle Anwender (Ingenieur) ohnehin damit vertraut ist.

Nötigenfalls kann man in Lehrbüchern nachsehen (z. B. in Lit. [Schweda])

2.1.1 Variablenbezeichnungen

Querschnittswert (Dimension)	Bezeichnungen	Maßeinheit	Bemerkungen
Koordinaten	$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$, $[\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i}]$	[m]	Die Eckpunktkoordinaten werden als Vektoren der *x,y*-Ebene in einem beliebigen örtlichen Rechtssystem in eckigen Klammern dargestellt. Bei einem Umrisspolygon mit ***n*** Eckpunkten läuft die Punktreihenfolge ***i*** von 1 bis ***n*** .
Querschnittsfläche, (Flächeninhalt, Flächengröße)	$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A_i}$	[m^2] oder [cm^2]	Nach den heutigen Normen wird der Buchstabe ***A*** (*area*) für den Flächeninhalt verwendet, bei *Fleßner* steht dafür noch der Buchstabe ***F*** (*Fläche*), mit dem hier aber allgemein eine Funktion bezeichnet werden soll.
Schwerpunktkoordinaten	$[\boldsymbol{x_s}, \boldsymbol{y_s}]$ $[\boldsymbol{x_{si}}, \boldsymbol{y_{si}}]$	[m]	werden über Vektoren aus Querschnittsfläche und statischen Flächenmomenten berechnet
Trägheitsmomente	$\boldsymbol{I_x}$, $\boldsymbol{I_y}$, $\boldsymbol{I_{xs}}$, $\boldsymbol{I_{ys}}$, $\boldsymbol{I_u}$, $\boldsymbol{I_v}$	[m^4] oder [cm^4]	bezogen auf das örtliche *x,y*-Koordinatensystem, auf die Schwerachsen *x*', *y*' des Querschnitts und auf die Trägheits-Hauptachsen *u*, *v*. *Fleßner* verwendet den Buchstaben ***J*** anstelle von ***I*** für die Trägheitsmomente.
Zentrifugalmomente (Deviationsmomente)	$\boldsymbol{I_{xy}}$, $\boldsymbol{I_{xys}}$, $\boldsymbol{I_{uv}}$	[m^4] oder [cm^4]	bezogen auf das örtliche *x,y*-Koordinatensystem, auf die Schwerachsen *x*', *y*' des Querschnitts und auf die Trägheits-Hauptachsen *u*, *v*. *Fleßner* verwendet den Buchstaben ***J*** anstelle von ***I*** für die Trägheitsmomente.
Winkel	$\boldsymbol{\beta}$	° , *Altgrad*	Winkel zwischen Trägheits-Hauptachsen (*u,v*) und Schwerachsen *x*', *y*' des Querschnitts, positiv gegen den Uhrzeigersinn von Achse *x*' nach *u*. *Im HP-Programm wird durch die Variablenbezeichnung* $\boldsymbol{\beta}$° *auf die Ausgabe in Altgrad hingewiesen.*
Trägheitsradius	$\boldsymbol{i_x}$, $\boldsymbol{i_y}$, $\boldsymbol{i_u}$, $\boldsymbol{i_v}$, $\boldsymbol{i}_{\min}$	[m] oder [cm]	Der für den Trägheitsradius übliche Buchstabe ***i*** ist beim HP für die Konstante $\boxed{\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}}$ vergeben und dient auch als Laufvariable für die Eckpunkte. Auf dem HP-Taschenrechner wird für den Trägheitsradius deshalb zu ***i*** immer ein Index dazugesetzt.
Umfang	$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L_i}$	[m] oder [cm]	Äußere Umrisslinie des Querschnitts, Länge einer Polygonseite
Punkte	**P**, **S**, $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{S}_i$		Eckpunkte und Schwerpunkte

Querschnittswert (Dimension)	Bezeichnungen	Maßeinheit	Bemerkungen
Vektoren	$\underline{\boldsymbol{P}}$, $\underline{\boldsymbol{S}}$, $\underline{\boldsymbol{P}_i}$, $\underline{\boldsymbol{S}_i}$		Vektorbezeichnungen werden kursiv+fett geschrieben und unterstrichen. Die für Vektoren üblichen Frakturbuchstaben stehen im Formeleditor nicht zur Verfügung.

2.1.2 Maßeinheiten

2.1.2.1 Längen

Die Ergebnisse sind von der gewählten Längenmaßeinheit unabhängig. Alle Eingaben (Vektorkomponenten als Längenmaß) müssen aber in derselben Maßeinheit erfolgen, dann sind auch die Ergebnisse (Flächen, Widerstandmomente, Trägheitsmomente usw.) auf diese Maßeinheit bezogen. In der obigen Tabelle ist die Dimension jeweils bei der Variablen angegeben.

Beispiele:

Maßeinheit [m]

Ergebnis: Fläche [m^2], Widerstandsmomente [m^3], Trägheitsmomente [m^4]

Maßeinheit [cm]

Ergebnis: Fläche [cm^2], Widerstandsmomente [cm^3], Trägheitsmomente [cm^4]

2.1.2.2 Winkel

Der Winkel $\boldsymbol{\beta}$ zwischen Haupt- und Schwerachsen eines Querschnitts wird in **Altgrad** (Degrees, °) ausgegeben. Bogenmaß und Neugrad (Gon) sind in diesem Ingenieurbereich (Statiker) nicht üblich.

2.1.3 Der Gaußsche Integralsatz

Die Berechnung eines Flächeninhalts lässt sich in bekannter Weise unter Anwendung des *Gaußschen Integralsatzes der Ebene* durchführen, dieser lautet in der allgemeinen Form (siehe auch Lit. [Bronstein], dort die Seiten 349 und 352):

Formel 1: Gaußscher Integralsatz der Ebene

$$\boxed{\iint\limits_{(B)} F_x(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_{(C)} F(x,y)\,\mathrm{d}y}$$

(B) ist hierbei ein beliebiger, einfach oder mehrfach zusammenhängender Bereich in der Ebene, der von einer stückweise glatten und einfachen Kurve (C) begrenzt ist (siehe Bild 1).

Die Klammern bei (B) und (C) sollen andeuten, dass es sich hier um eine zusammenhängende Fläche bzw. geschlossene Linie handelt. Der Kreis in der Mitte des Integralzeichens zeigt an, dass entlang der geschlossenen Linie (C) integriert werden muss.

Setzt man in Formel 1 $\boxed{F_x(x,y) \equiv 1}$ und $\boxed{F(x,y) \equiv x}$, dann ergibt sich für den Flächeninhalt $\boldsymbol{A}$ des Bereiches (B) die Formel 2:

Formel 2: Flächeninhalt des Bereichs

$$\boxed{A = \iint\limits_{(B)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_{(C)} x\,\mathrm{d}y}$$

und nach einigen Umformungen die bekannte Beziehung

Formel 3: Flächeninhalt des Querschnitts

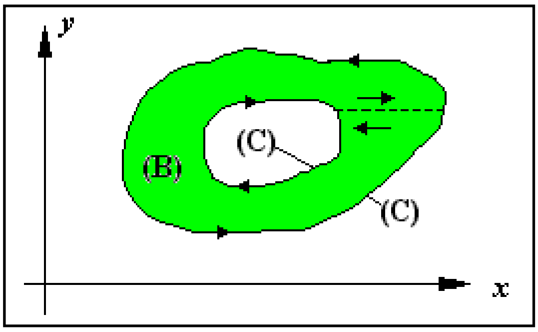
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\oint (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)}$$

Der Bereich (B) wird hier „Querschnitt“ und die geschlossene Linie (C) „Umrisslinie“ genannt.

2.1.4 Anschauliche Erläuterung des Gaußschen Integralsatzes

2.1.4.1 Umfahrung des Querschnitts

Bild 1: Beliebiger Querschnitt



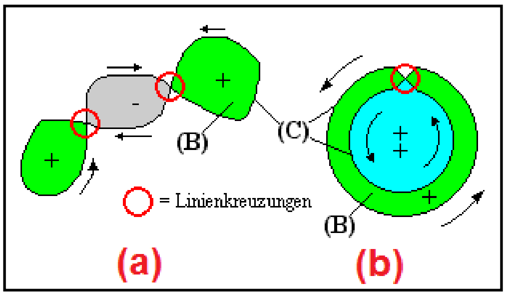
Wenn man eine durch eine geschlossene Linie (C) umgrenzte Fläche (B) gemäß Bild 1 im mathematisch positiven Sinne (= linksherum = gegen den Uhrzeigersinn in einem Koordinaten-Rechtssystem) mit der Spitze eines an (C) entlang geführten Ortsvektors umfährt, dann ergibt sich nach Formel 3 ein positiver Flächeninhalt; bei Umfahrung im mathematisch negativen Umlaufsinn (= rechtsherum = also im Uhrzeigersinn) ergibt sich ein negativer Flächeninhalt.

Bei Figuren mit Aussparungen fährt man außen, beginnend bei einem beliebigen Anfangspunkt, linksherum, fährt dann auf einer Verbindungslinie (in Bild 1 gestrichelt dargestellt) nach innen, <u>umfährt die innen liegende Aussparung rechtsherum</u> (dadurch wird sie subtrahiert) und fährt <u>auf derselben Verbindungslinie</u> wieder nach außen und fährt dort linksherum bis zum Ausgangspunkt weiter.

Der Anfangspunkt muss zugleich der Endpunkt sein, die Lage dieses Punktes ist unwesentlich. Die Umrisslinie (einschließlich der in beiden Richtungen befahrenen Verbindungslinie) der in der Bild 1 grün angelegten Fläche, die den Flächeninhalt ***A*** des Bereichs (B) darstellt, muss ein einziger geschlossener Linienzug sein.

Man könnte in Bild 1 (als Gedankenexperiment) die grüne Fläche an der gestrichelten Linie durchschneiden und auseinanderbiegen, die entstandene neue Form würde dann nur linksherum umfahren werden.

Bild 2: Verbotene Umrisslinien



Die in beiden Richtungen befahrene (gestrichelte) Verbindungslinie in Bild 1 darf nicht zur Linienkreuzung (ver)führen. Die geschlossene Linie (C) darf nur eine einzige, evtl. über Verbindungslinien zusammenhängende Fläche umgrenzen, sie darf sich nicht selber schneiden, es dürfen <u>keine Linienkreuzungen</u> entstehen.

Beispiele: Durch die verbotene Umrisslinie von Bild 2a entstünden negative Flächeninhalte außerhalb von positiven Flächeninhalten, die dem hier verfolgten Zweck der Berechnung von Querschnittsflächen nicht genügen würden. Ebenso ist die Umrisslinie in Bild 2b nicht zulässig, weil dann der hellblaue Flächenteil doppelt berechnet würde.

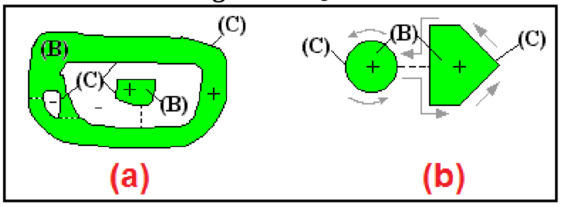
Wird dagegen der innere Teil von Bild 1b gegen die gezeigte Pfeilrichtung rechtsherum umfahren, dann ist der Querschnitt zulässig, weil es dann keine Linienkreuzung gibt und die Verbindungslinie zu einem einzigen Punkt (der dann kein Kreuzungspunkt mehr ist) zusammenschrumpft.

Merksatz:
Beim Umfahren eines Bereichs (B) entlang der Linie (C) muss das Innere der umfahrenen Fläche stets zur Linken liegen.

2.1.4.2 Zusammengesetzte Querschnitte

Dagegen sind mehrere negative Flächen, die ganz innerhalb von positiven Flächen liegen, zulässig. Z.B. sind mehrere nebeneinander oder ineinander liegende Aussparungen innerhalb einer geschlossenen äußeren Begrenzung zulässig (Hohlquerschnitte). Der Querschnitt in Bild 3a ist zulässig, weil sich die Flächen mit einer einzigen zusammenhängenden Linie (C) (über die Verbindungslinien) umfahren lassen.

Bild 3: Zusammengesetzte Querschnitte



Die geschlossene Linie (C) darf sich zwar nicht selber schneiden, aber sie darf mit dem Abstand null (als Verbindungslinie) parallel laufen oder sich selbst entgegenlaufen. Auf diese Weise kann man zusammengesetzte Querschnitte erzeugen.

Bild 3b zeigt einen so entstandenen Doppelquerschnitt, der aus zwei getrennten Teilquerschnitten besteht, der aber als ein Querschnitt berechnet werden soll. Die Pfeile zeigen den positiven Umlaufsinn der einzigen gemeinsamen geschlossenen Linie (C), die über die Verbindungslinien beide Figuren umläuft.

Merksatz:

Auf einer (immer) in beiden Richtungen befahrenen Verbindungslinie herrscht

- innerhalb einer positiven Fläche Linksverkehr und
- außerhalb einer positiven Fläche Rechtsverkehr.

Ein Spurwechsel (Linienkreuzung) ist nicht zulässig.

2.1.5 Planimeter

Aus Formel 3 lässt sich auch die Wirkungsweise des Planimeters (Polarplanimeter, Kompensationspolarplanimeter) herleiten, das genau nach obiger Erläuterung durch Umfahren der Flächen funktioniert.

Früher saß der Verfasser manchmal tagelang am Planimetertisch und planimetrierte Querprofile für den Straßenbau, um die Flächeninhalte zu ermitteln. Jetzt im Zeitalter der Digitalisiertische, Digitalisiertabletts und Scanner ist das Planimeter kaum mehr bekannt. Heute wird digitalisiert, gescannt und vektorisiert, das Planimeter hat ausgedient.

Die Erläuterung des Planimeters ist z.B. in Lit. [MathHb] und auch im Internet bei Wikipedia oder allgemein im Internet unter dem Stichwort *Planimeter* oder *Polarplanimeter* zu finden.

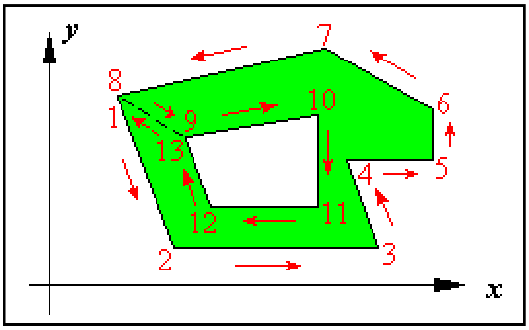
3 Berechnungsformeln

Zusammenhängende mathematische Funktionen für Formel 1 liegen meist nicht vor, so dass hier für das Taschenrechnerprogramm eine andere Möglichkeit gewählt werden muss.

In der Praxis kann die geschlossene Linie (C) von Bild 1 durch abschnittsweise gerade Linien (Streckenzüge, Polygonzüge) gebildet werden. Die Querschnittsformen für die meisten zu berechnenden Querschnitte sind in der Praxis mit ausreichender Genauigkeit durch Polygonzüge darstellbar, wenn die Eckpunkte entsprechend dicht liegen. Die den Bereich (B) umschließende Randkurve (C) wird hierbei durch Geradenstücke gebildet, deren Endpunkte koordinatenmäßig festliegen. Für jedes Geradenstück kann ein Teilintegral gebildet werden, die Querschnittsfläche erhält man durch die Summierung der Teilintegrale.

3.1 Flächenberechnung mit Koordinaten

Bild 4: Reihenfolge der Eckpunkte



Aufgrund der Geradenstücke des Polygonzugs können die Integrale durch Summierungen ersetzt werden. Für ***n*** Eckpunkte eines geschlossenen Polygonzuges erhält man dann folgende Endformel zur Flächenberechnung:

Formel 4: Fläche eines geschlossenen Polygons

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}\right)$$

Wichtige Hinweise zur praktischen Anwendung:

Die Koordinaten der Punkte x_i, y_i sind in mathematisch positivem Umlaufsinn in Formel 4 einzusetzen.

Das heißt: Die Punktreihenfolge ist dabei so zu wählen, dass die Fläche beim Fortschreiten von ***i*** zu ***i***+1 so umfahren wird, dass ihr Inneres (in Bild 4 die grüne Fläche) zur Linken liegt, also im mathematisch positiven Sinn gegen den Uhrzeigersinn.

Bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen (Aussparungen) ist dabei die Fläche so zu umfahren, wie die Punktreihenfolge in Bild 4 es zeigt.

Bei einem Polygon mit ***n*** Eckpunkten schließt die (letzte) Verbindungsgerade von Punkt ***n*** zum Punkt 1 (Anfangspunkt) den Polygonzug. Für die Berechnung der ***n*** Teilflächen sind ***n***+1 Punkte erforderlich. Deshalb wird der Anfangspunkt für die Berechnung der ***n***-ten Teilfläche vom Programm automatisch hinzugenommen.

$i = n + 1$ und $i = 1$ bezeichnen also denselben Punkt (Anfangspunkt = Endpunkt), da die Randlinie stets geschlossen sein muss. Bei $i = n$ wird $i + 1 = [(n + 1) \text{ modulo } n] = 1$.

3.2 Flächenberechnung mit Vektoren

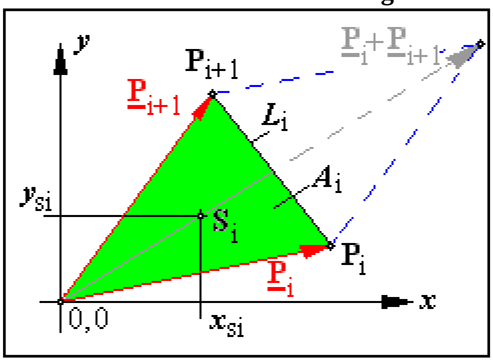
3.2.1 Länge der Polygonseite

Die Länge L_i der Polygonseite (in Bild 5) vom Punkt $\mathbf{P_i}$ zu $\mathbf{P_{i+1}}$ ist der Betrag der Vektordifferenz der benachbarten Vektoren, also

Formel 5: Länge der Polygonseite

$$L_i = \left|\underline{P_i} - \underline{P_{i+1}}\right|$$

Bild 5: Teilfläche mit Bezeichnungen



Die Berechnung wird an den durch die Polygonseiten gegebenen dreieckförmigen Teilflächen vorgenommen. Dies sind die Dreiecke mit den drei Eckpunkten $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}_{i+1}$ und dem Koordinatenursprung (0,0) (siehe Bild 5). Die auf diese Weise berechneten Werte der Teilflächen werden vorzeichenrichtig aufsummiert und ergeben die gesuchten Werte für die gesamte Querschnittsfläche.

Definition:
Die Vektoren vom Koordinatenursprung zu den jeweiligen Eckpunkten $\mathbf{P}_i$ erhalten die Bezeichnung $\underline{P_i}$ (Ortsvektoren $[x_i , y_i]$ für die Indizes i von 1 bis n), wobei x_i und y_i die Komponenten des Vektors $\underline{P_i}$ sind.

Die runde Klammer in obiger Formel 4 stellt das Vektorprodukt (Kreuzprodukt) der beiden benachbarten Ortsvektoren $\underline{\boldsymbol{P_i}}$ und $\underline{\boldsymbol{P_{i+1}}}$ dar. Das Vektorprodukt ist ein Vektor, dessen halbe $\boldsymbol{z}$-Komponente vorzeichenrichtig die Teilfläche $\boldsymbol{A}_i$ ergibt. Deshalb lässt sich Formel 4 auch in Vektorschreibweise darstellen:

Formel 6: Fläche als halbesVektorprodukt

$$[0,0,\boldsymbol{A}]=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}[0,0,2\cdot\boldsymbol{A}]=\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\underline{\boldsymbol{P_i}}\times\underline{\boldsymbol{P_{i+1}}}\right)$$

Die Formel 6 berechnet die halbe Summe des Vektorprodukts als neuen Vektor, dessen $\boldsymbol{z}$-Komponente vorzeichenrichtig die Querschnittsfläche $\boldsymbol{A}$ angibt.

Hinweise: Mit den Querschnitten wird ausschließlich in der $\boldsymbol{x,y}$-Ebene gearbeitet, deshalb kann wegen $\boldsymbol{z}_i = 0$ die dritte Vektorkomponente weggelassen werden. Abweichend von der Literatur wird hier $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ für die Querschnittsebene verwendet und $\boldsymbol{z}$ weist in Stablängsrichtung.

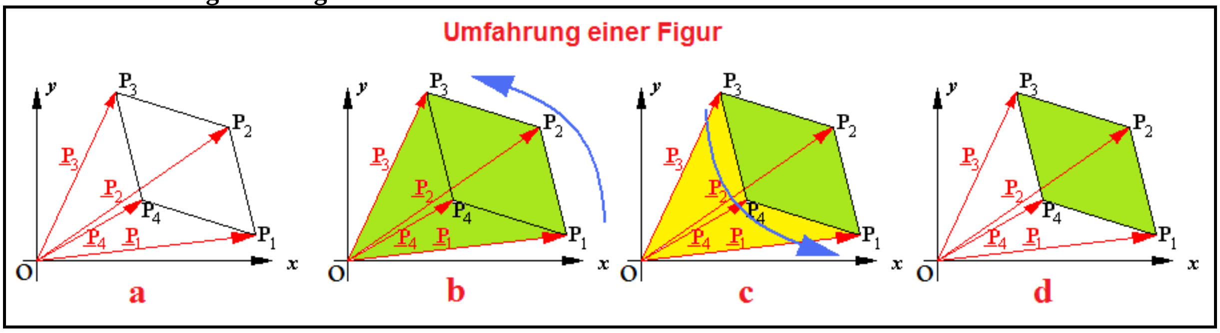
Bei $\boldsymbol{n}$-dimensionalen Vektoren auf dem HP werden die $\boldsymbol{n}$ Vektorkomponenten in eckige Klammern [ ] geschrieben.

Da der HP die Vektorrechnung voll unterstützt, werden hier Flächen, Schwerpunktlage und Längen der Polygonseiten über Vektoren ermittelt.

3.2.2 Anschauliche Erläuterung der Flächenberechnung

Die Flächenberechnung nach *Gauß* lässt sich sehr anschaulich mit einer Umfahrung der Figur zeigen (Bild 6):

Bild 6: Umfahrung einer Figur



Ein mit seiner Spitze entlang des Polygonzugs geführter Ortsvektor (Fahrstrahl = Strahl vom Koordinatenursprung zur Polygonlinie),

a) <u>beginnt</u> bei Punkt P_1 (Bild 6a),

b) <u>färbt</u> beim Fortschreiten (blauer Pfeil) von $\mathbf{P}_1$ über $\mathbf{P}_2$ bis zu $\mathbf{P}_3$ (linksherum um den Koordinatenursprung = positive Fläche) die überstrichene Fläche grün ein (grüne Fläche in Bild 6b) und

c) <u>radiert</u> beim Zurückkehren (blauer Pfeil) von $\mathbf{P}_3$ über $\mathbf{P}_4$ bis zum Anfangspunkt $\mathbf{P}_1$ beim erneuten Überstreichen in der anderen Richtung (rechtsherum um den Koordinatenursprung = negative Fläche) den außerhalb der Figur $P_1P_2P_3P_4$ liegenden Teil der vorher überstrichenen Fläche wieder aus (gelbe Fläche in Bild 6c).

d) <u>Übrig bleibt</u> die gewünschte Fläche innerhalb der Figur (grüne Fläche in Bild 6d).

Da der Polygonzug geschlossen ist und der Fahrstrahl dadurch wieder in seine Ausgangslage zurückkehren muss, ist die Summe der Winkel, die er überstreicht, gleich null. Dadurch werden die außerhalb des Polygonzugs liegenden (manchmal mehrfach) überstrichenen Flächen wieder ausradiert. Deshalb ist es unerheblich, wo der Koordinatenursprung liegt, es kann ein beliebiges örtliches Koordinatensystem verwendet werden.

Übrig bleibt die vom geschlossenen Polygonzug eingeschlossene Fläche. Aus der unterschiedlichen Länge der Vektoren beim Umfahren der Fläche von $\mathbf{P}_1$ zu $\mathbf{P}_2$ zu $\mathbf{P}_3$ zu $\mathbf{P}_4$ und wieder zurück zu $\mathbf{P}_1$ in Bild 6 ergibt sich der Flächeninhalt als Differenz zwischen den zuerst gefärbten (grün) und wieder ausradierten (gelb) Flächen.

3.3 Lage des Flächenschwerpunkts

Der Vektor $\underline{\boldsymbol{S_i}}$ zum Schwerpunkt $\mathbf{S}_i$ der Teilfläche $\boldsymbol{A}_i$ (in Bild 5) ist ein Drittel des Summenvektors $\underline{\boldsymbol{P_i}} + \underline{\boldsymbol{P_{i+1}}}$, also

Formel 7: Lagevektor des Schwerpunkts einer Teilfläche

$$\underline{S_i} = [x_{si}, y_{si}] = \frac{(\underline{P_i} + \underline{P_{i+1}})}{3} = \left[\frac{x_i + x_{i+1}}{3}, \frac{y_i + y_{i+1}}{3}\right]$$

Die Lage des Querschnitt-Schwerpunkts ergibt sich aus der Summe der statischen Momente der Teilflächen, dividiert durch die Querschnittsfläche $\boldsymbol{A}$. Dies lässt sich sehr gut über Vektoren berechnen:

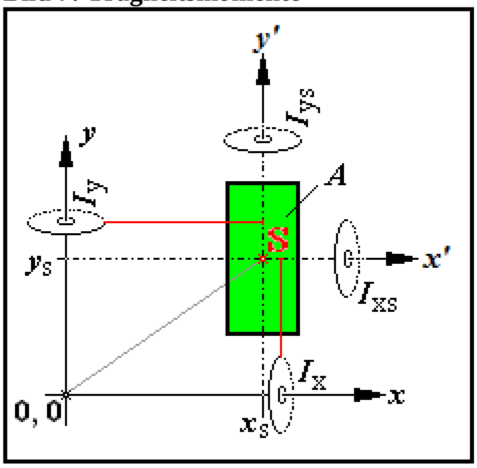
Formel 8: Schwerpunktvektor eines Querschnitts

$$\underline{S} = [x_s, y_s] = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \underline{S_i}}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

Der Vektor $\underline{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_s]$ zeigt zum Schwerpunkt der Querschnittsfläche $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{x_s}$ ist der Abstand des Schwerpunkts von der x-Achse und $\boldsymbol{y_s}$ ist der Abstand von der y-Achse.

3.4 Trägheitsmomente

Bild 7: Trägheitsmomente



Trägheitsmomente (auch Flächenmomente zweiter Ordnung genannt) sind meist auf Querschnittsachsen bezogen. Diese gehen durch den Schwerpunkt. Deshalb nennt man sie auch Schwerachsen. Am gebräuchlichsten sind die Trägheitsmomente, die sich auf die Schwerachsen $\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}$ des Querschnitts beziehen, die parallel zu den Achsen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ des verwendeten Koordinatensystems liegen.

Trägheitsmomente können aber auch auf andere Achsen bezogen werden, die nicht Schwerachsen sind.

Bei unregelmäßigen Querschnittsformen sind außer den Schwerachsen $\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}$ auch noch die Hauptachsen interessant. Für diese sind die Trägheitsmomente Extremwerte (Maximum, Minimum).

3.4.1 Trägheitsmomente im örtlichen Koordinatensystem x,y

Zuerst müssen die Trägheitsmomente $\boldsymbol{I_x}$, $\boldsymbol{I_y}$ und das Zentrifugalmoment $\boldsymbol{I_{xy}}$ (Deviationsmoment) im gewählten örtlichen Koordinatensystem berechnet werden, auf das sich auch die Koordinatenwerte der Eckpunkte des Querschnitts beziehen.

Die Herleitung der Formeln kann bei *Fleßner* nachgelesen werden. Nach *Fleßner* gilt (Lit. [Fleßner]):

Formel 9: Trägheitsmomente des Polygons, bezogen auf das Koordinatensystem

$$\boldsymbol{I}_x = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\cdot\left(\left(y_i + y_{i+1}\right)^2 - y_i y_{i+1}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{I}_y = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\cdot\left(\left(x_i + x_{i+1}\right)^2 - x_i x_{i+1}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{I}_{xy} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right)\cdot\left(\left(x_i + x_{i+1}\right)\cdot\left(y_i + y_{i+1}\right) - \frac{1}{2}\left(x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i\right)\right)\right]$$

Während I_x und I_y nur positive Werte haben können, kann $\boldsymbol{I}_{xy}$ positiv oder negativ sein, je nach Lage der Teilflächen im örtlichen Koordinatensystem.

3.4.2 Axiale Trägheitsmomente im Schwerpunkt für x', y'

Die Ergebnisse aus Formel 9 sind nur Hilfswerte zur Berechnung der endgültigen, auf die Schwerachsen x', y' bezogenen Werte $\boldsymbol{I}_{xs}$, $\boldsymbol{I}_{ys}$ und $\boldsymbol{I}_{xys}$ (siehe Bild 7).

Als zweiter Schritt erfolgt die Berechnung der axialen Trägheitsmomente $\boldsymbol{I}_{xs}$, und $\boldsymbol{I}_{ys}$ und des Zentrifugalmoments $\boldsymbol{I}_{xys}$ für die Schwerachsen $\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y'}$ des Querschnitts (in Bild 7 strichpunktiert) nach dem (umgestellten) Steinerschen Satz aus den Ergebnissen der Formel 8 und Formel 9:

Formel 10: Axiale Trägheitsmomente und Zentrifugalmoment

$$\boldsymbol{I}_{xs} = \boldsymbol{I}_x - \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{y}_s^{\,2}$$

$$\boldsymbol{I}_{ys} = \boldsymbol{I}_y - \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{x}_s^{\,2}$$

$$\boldsymbol{I}_{xys} = \boldsymbol{I}_{xy} - \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{x}_s\cdot \boldsymbol{y}_s$$

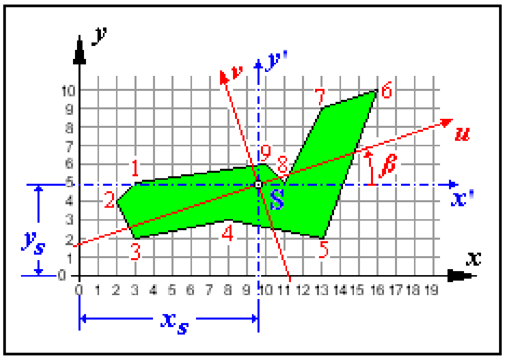
3.4.3 Trägheitsmomente für die Hauptachsen u,v

Als Beispiel wird ein unsymmetrischer Querschnitt berechnet, der in Bild 8 zu sehen ist. *Fleßner* (siehe Lit. [Fleßner]) verwendet in seinem Beitrag einen ähnlichen Querschnitt.

In Bild 8 sind drei orthogonale Koordinatensysteme eingezeichnet:

1. Örtliches Koordinatensystem ***x,y,***
2. Axiales Koordinatensystem ***x',y'*** im Schwerpunkt des Querschnitts,
3. Koordinatensystem der Hauptachsen ***u,v.***

Bild 8: Unsymmetrischer Querschnitt



Für symmetrische Querschnitte sind die Schwerachsen wegen $\boldsymbol{I}_{xys} = 0$ zugleich auch die Hauptachsen des Querschnitts. Die mit Formel 10 berechneten Trägheitsmomente $\boldsymbol{I}_{xs}$ und $\boldsymbol{I}_{ys}$ sind dann bereits die Extremwerte.

Für Querschnitte, die nicht zu einer oder beiden Schwerachsen $\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y'}$ symmetrisch sind, ist dasjenige orthogonale Achsenpaar (Hauptachsen) zu berechnen, für das die Trägheitsmomente Extremwerte annehmen.

Mit den Trägheitsmomenten $\boldsymbol{I}_{xs}$, $\boldsymbol{I}_{ys}$ und dem Zentrifugalmoment $\boldsymbol{I}_{xys}$ der Formel 10 kann der Winkel $\boldsymbol{\beta}$ ausgerechnet werden, wobei die Drehrichtung des Winkels von den Schwerachsen $\boldsymbol{x'}$, $\boldsymbol{y'}$ zu den Hauptachsen, $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ genannt, gegen den Uhrzeigersinn positiv gerechnet wird (siehe Bild 8).

Formel 11: Hauptträgheitsmomente (Hauptachsen)

$$\tan(2\beta) = \frac{2 \cdot I_{xys}}{I_{ys} - I_{xs}}$$

$$I_u = \frac{I_{xs} + I_{ys}}{2} + \left[\frac{I_{xs} - I_{ys}}{2} \cdot \cos(2\beta) - I_{xys} \cdot \sin(2\beta)\right]$$

$$I_v = \frac{I_{xs} + I_{ys}}{2} - \left[\frac{I_{xs} - I_{ys}}{2} \cdot \cos(2\beta) - I_{xys} \cdot \sin(2\beta)\right]$$

Bei $I_{xys} = 0$ ergibt sich definitionsgemäß $I_u = I_{xs}$ und $I_v = I_{ys}$ (für symmetrische Querschnitte). Bei unsymmetrisch zu den Schwerachsen x', y' liegenden Querschnitten kann $I_{xs} = I_{ys}$, also $I_{ys} - I_{xs} = 0$ sein. In diesem Fall ergibt sich für tan(2β) der Wert „unendlich“. Dies entspricht $\beta = 45°$. Dieser Fall führt beim Rechner wegen der Division durch null zu einer Fehlermeldung.

Deshalb muss vorher eine Prüfung auf $I_{ys} - I_{xs} = 0$ erfolgen. Beim HP genügt es, die Flags für *Underflow*, *Overflow* und *Infinite* richtig einzustellen, dann wird der Fehler toleriert und für „unendlich“ der Wert ±9E499 gesetzt.

Merksätze
zur Nachprüfung der Werte:

Ein auf eine Schwerachse bezogenes Trägheitsmoment eines Querschnitts ist immer kleiner als das Trägheitsmoment, das sich auf eine zu dieser Schwerachse parallele Achse bezieht (folgt zwingend aus den Gleichungen der Formel 10)

Die Summe der beiden Trägheitsmomente ist für jedes orthogonale Schwerachsenpaar desselben Querschnitts immer gleich. Z. B. gilt: $I_{xs} + I_{ys} = I_u + I_v$ (folgt aus den Gleichungen der Formel 11).

Während I_{xs} und I_{ys} nur positive Werte haben können, kann I_{xys} positiv oder negativ sein. $I_{xys}=0$, wenn mindestens eine der senkrecht aufeinander stehenden Schwerachsen x', y' eine Symmetrieachse ist.

3.5 Trägheitsradien

Für Stabilitätsberechnungen von schlanken Bauteilen (Stützen) braucht man den Trägheitsradius i, um den Schlankheitswert berechnen zu können. Theoretisch gibt es eine Trägheitsellipse für den Querschnitt. Jedem Trägheitsmoment ist ein entsprechender Trägheitsradius nach folgenden Formeln zugeordnet:

$$i_x = \left|\sqrt{\frac{I_x}{A}}\right|;\quad i_y = \left|\sqrt{\frac{I_y}{A}}\right|;\quad i_u = \left|\sqrt{\frac{I_u}{A}}\right|;\quad i_v = \left|\sqrt{\frac{I_v}{A}}\right|.$$

Für den Statiker ist aber nur der minimale Wert des Trägheitsradius interessant, der sich aus dem minimalen Trägheitsmoment ergibt:

Formel 12: Minimaler Trägheitsradius

$$i_{\min} = \left|\sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}\right|$$

Auf dem HP ist die Bezeichnung i schon mit der imaginären Konstanten $\boxed{i = \sqrt{-1}}$ belegt. Deshalb wird für den Trägheitsradius auf dem HP die Variablenbezeichnung mit Index (also $i_{\min}$) verwendet.

3.6 Widerstandsmomente

Die Widerstandsmomente sind auf den jeweiligen Eckpunkt oder auf eine zu einer Biegeachse parallele Kante des Querschnitts bezogen. Sie werden berechnet aus dem Trägheitsmoment, dividiert durch den jeweiligen Punktabstand von der zugeordneten Biegeachse (Schwerachse).

In der Praxis wird für Spannungsberechnungen das auf eine Biegeachse bezogene minimale Widerstandsmoment des Querschnitts verwendet, das sich aus dem Trägheitsmoment $\boldsymbol{I}$ der zugeordneten Biegeachse, dividiert durch den maximalen Abstand $\boldsymbol{a}_{\max}$ eines Eckpunktes oder einer Kante von dieser Biegeachse, ergibt:

Formel 13: Widerstandsmoment

$$\boxed{W_{\min} = \frac{I}{a_{\max}}}.$$

Da das Widerstandmoment kein für den ganzen Querschnitt gültiger Kennwert ist, sondern vom jeweils betrachteten Randpunkt des Querschnitts abhängt, wird es bei der Programmierung weggelassen.

4 Programmierung für den Taschenrechner

Hier wird die Programmierung[2] für den HP-Taschenrechner gezeigt. Die Beispiele werden mit einem HP 50G berechnet.

Da dieser Rechner Listenverarbeitung und Vektorfunktionen sehr gut unterstützt, können damit die Summierungen, die in den oben genannten Formeln vorkommen, sehr einfach ausgeführt werden. Die Programmierung kann unter Anwendung dieser Funktionen sehr vereinfacht werden.

Nachstehend werden einzelne Teilaufgaben erläutert, das gesamte Quellprogramm ist im Anhang 5.4 abgedruckt. Auch auf der Internetseite des Verfassers ist das Quellprogramm unter QSWDIR.txt als Textdatei zu finden.

Bild 9: QSW, Menüseite 1

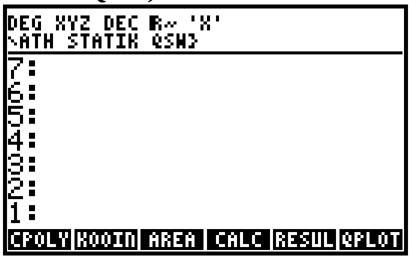


Bild 10: QSW, Menüseite 2

In Bild 9 ist die erste Seite des Programm-Menüs zu sehen. Dort stehen 6 Programme zur Verfügung: CPOLY KOOIN AREA CALC RESULTS QPLOT, die mit den zugeordneten Tasten F1 bis F6 der oberen Tastenreihe des HP-Taschenrechners aufgerufen werden.

In Bild 10 ist die zweite Seite des Programm-Menüs zu sehen, sie zeigt:
QPLO POLYGON BILD und QSich. **QSich** ist ein Unterverzeichnis.

Der Inhalt der Variablen POLYGON sollte nach Abschluss der Berechnung in eine Variable mit geeignetem Namen gespeichert werden, die im Unterverzeichnis QSICH (Querschnitte-Sicherung) für spätere Berechnungen abzulegen ist.

---

[2] Der Verfasser hat eine Beitragsreihe „Wissenschaftliche HP-Taschenrechner im praktischen Einsatz“ geschrieben, die die Programmierung der HP-Taschenrechner für Ingenieuranwendungen zeigt. Sie ist auf der Internetseite des Verfassers zu finden.

4.1 Eingabe der Polygon-Eckpunkte

4.1.1 Neuanlegen der Variablen POLYGON

Als Variablenname für die Liste mit den Koordinaten wird **POLYGON** gewählt. Diese Variable enthält nach korrekter Eingabe die ***n*** Koordinatenpaare als Vektoren für ***n*** Polygonpunkte.

Mit dem Programm **CPOLY** (Create Polygon) wird eine leere Liste[3] in der Variablen **POLYGON** erzeugt: `« {} 'POLYGON' STO »`

Damit werden alte Inhalte von **POLYGON** gelöscht. Gegebenenfalls sind die alten Inhalte vorher zu sichern.

4.1.2 Koordinatenwerte für die Variable POLYGON

Die Eingabe für ein Koordinatenpaar als Vektor erfolgt mit dem Programm **KOOIN** (Koordinaten-Eingabe)**:** `« →V2 POLYGON SWAP + 'POLYGON' STO »`

Die Werte für ***x*** und ***y*** werden in den Stack eingegeben und dann wird das Programm **KOOIN** mit Taste F2 aufgerufen.

Dieses Programm wandelt diese Werte in einen Vektor um, und hängt ihn an die bestehende Liste POLYGON an. Man kann die Eingabe jederzeit unterbrechen und später weitere Vektoren anhängen. Diese Liste kann auch jederzeit editiert (korrigiert) werden.

Wenn die ***n*** Koordinatenpaare für das Polygon eingegeben worden sind, ist die korrekte Eingabe fertig. Auf Plausibilitätsprüfungen wurde aufgrund der Einfachheit der Eingabe verzichtet.

Achtung:
Für eine Berechnung der Querschnittswerte muss die Variable POLYGON existieren und mindestens 3 Vektoren enthalten, sonst weigert sich später das Berechnungsprogramm, die Berechnung durchzuführen. Es muss also mindestens <u>ein</u> Dreieck existieren.

4.1.3 Eingabebeispiel

Als Eingabebeispiel wählen wir den in Bild 8 dargestellten Querschnitt und zeigen den Eingabevorgang für die Koordinaten.

Der Einfachheit halber werden nur ganzzahlige Koordinatenwerte gewählt. Dezimalzeichen müssen deshalb nicht eingegeben werden, sie werden vom System ergänzt. Als Dezimalzeichen wird das Komma voreingestellt.

Mit der SPC-Taste werden Leerzeichen zwischen die Zahlen gesetzt und eingegeben.

Hier die Tastenfolge für die korrekte Eingabe des gesamten Polygons mit 9 Polygon-Eckpunkten.

CPOLY
3 SPC 5 KOOIN 2 SPC 4 KOOIN 3 SPC 2 KOOIN 8 SPC 3 KOOIN
13 SPC 2 KOOIN

hier könnte man z.B. unterbrechen und später weitermachen mit

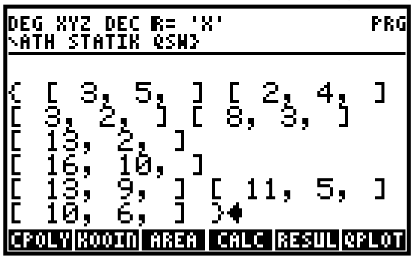
16 SPC 10 KOOIN 13 SPC 9 KOOIN 11 SPC 5 KOOIN 10 SPC 6 KOOIN

Fertig!

---

[3] Eine Liste wird beim HP durch { } geschweifte Klammern begrenzt.

Bild 11: POLYGON nach Eingabe



Die Liste in POLYGON enthält nun 9 Koordinatenpunkte und muss auf dem HP wie auf Bild 11 aussehen.

4.2 Plottprogramme QPLO und QPLOT

Das Programm **QPLO** plottet die Linien, dessen Koordinaten in **POLYGON** gespeichert sind. Es zeigt nur die bisher eingegebenen Eckpunkte mit den Verbindungslinien (Streckenzug). Das Programm **QPLOT** dagegen ergänzt das eingegebene Polygon mit der Schlusslinie vom Endpunkt zum Anfangspunkt, sodass der vollständige Querschnitt als Polygon zu sehen ist.

Bild 12 zeigt das oben im Beispiel unter 4.1.3 eingegebene Polygon ohne Schlusslinie, Bild 13 zeigt den Querschnitt mit Schlusslinie.

Bild 12: QPLO des Beispiels 4.1.3

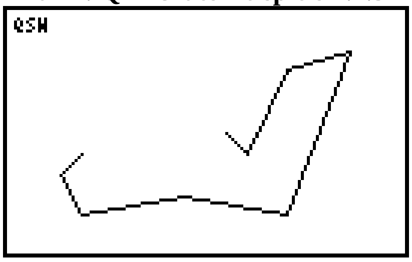
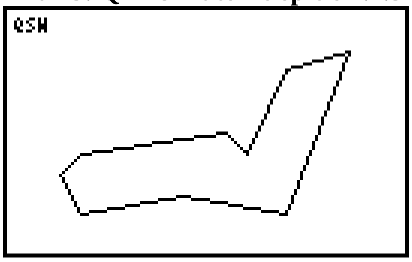


Bild 13: QPLOT des Beispiels 4.1.3



Dabei wird automatisch „skaliert“, das heißt, die Größe der Zeichnung wird automatisch so angepasst, dass der gesamte Querschnitt den LCD-Bildschirm ausfüllt. Dies ist unabhängig von der gewählten Längeneinheit und der Größenordnung der Koordinatenwerte.

Auf die Darstellung der Hauptachsen und des Schwerpunkts wurde verzichtet, weil dann vor dem Plotten die Berechnung durchgeführt sein müsste. Das Plottprogramm soll aber bereits bei der Koordinateneingabe**,** wenn noch keine berechneten Werte vorliegen, eine Sichtprüfung des Querschnitts ermöglichen.

Beim Plottprogramm zeigt sich der besondere Vorteil von Vektoren in Listen. Es ist keine Schleife notwendig.

Die geplottete Figur zeigt alle Linien, also auch die Verbindungslinien der zusammengesetzten Querschnitte.

4.3 Flächenberechnung mit AREA

Die Variable POLYGON enthält die Koordinaten für die Polygon-Eckpunkte aus der vorangegangenen Eingabe. Das Flächenberechnungsprogramm **AREA** für die Querschnittsfläche ***A*** ist dann sehr einfach.

```
« POLYGON DUP HEAD + 2. « CROSS 2. / » DOSUBS « + » STREAM V→ + + »
```

Das Programm liest die Liste und hängt noch den ersten Punkt an die Liste an. Auf diese Weise wird das Polygon immer geschlossen. Dann berechnet das Programm den Flächeninhalt und stellt das Ergebnis als Zahl (für obiges Beispiel den Wert 45) in den Stack.

Einfacher geht's vermutlich nicht mehr: Schleifenprogrammierung entfällt. Mit lediglich zwei Vektor-Befehlen **CROSS** (Vektorprodukt = Kreuzprodukt) und **V→** und zwei Listenbefehlen **DOSUBS** und **STREAM** wird die Berechnung mit dem HP durchgeführt.

4.4 Erläuterung der Teilprogramme

Folgende Teilprogramme sind Bestandteil des Berechnungsprogramms **CALC**. Sie werden hier wegen des besseren Verständnisses aber getrennt erläutert. Die in diesen Teilprogrammen **rot** gedruckten Befehle fallen beim Gesamtprogramm weg, weil dort der Stack die Zwischenspeicherung übernimmt.

4.4.1 *Erzeugung einer Liste der Teilflächen Ai und der Fläche A*

```
« POLYGON DUP HEAD + 2. « CROSS 2. / » DOSUBS » 1 « V→ + + »
DOLIST DUP 'Ai' STO « + » STREAM 'A' STO »
```

Beide Ergebnisse werden für spätere Verwendung in die Variablen **Ai** und **A** gespeichert (in CALC verbleibt **Ai** im Stack).

4.4.2 *Erzeugung einer Liste mit n Schwerpunktsvektoren $\underline{S}_i$*

```
« POLYGON DUP HEAD + 2. « + 3. / » DOSUBS 'Si' STO »
```

Das Ergebnis ist eine Liste der Schwerpunktkoordinaten der Teilflächen, sie wird in die Variable **Si** gespeichert (im Berechnungsprogramm **CALC** verbleibt sie im Stack).

4.4.3 *Berechnung des Schwerpunktvektors des Querschnitts*

```
« Ai Si « * » DOLIST « + » STREAM A / V→ 'ys' STO 'xs' STO {Ai
Si} PURGE »
```

Durch elementweises Multiplizieren beider Listen aus **Ai** und **Si**, also $A_i \cdot \underline{S}_i$, und anschließendes Aufsummieren dieser Teilprodukte entsteht das statische Moment des Gesamtquerschnitts, das durch ***A*** geteilt wird. Die Komponenten dieses berechneten Vektors **[**x_s **,** y_s**]** werden in die Variablen **xs** und **ys** gespeichert.

4.5 Berechnungsprogramm CALC

Für die Berechnung der Trägheitsmomente liegen aus obigen Teilprogrammen bereits die Werte A, x_s und y_s als Ergebnisse vor. Diese Teilprogramme werden in CALC zusammengefasst und die restlichen Berechnungen, hinzugenommen:

- Werte für I_x, I_y und I_{xy} nach den Gleichungen der Formel 9,
- Trägheitsmomente I_{xs}, I_{ys} und I_{xys} für die Schwerachsen x, y nach den Gleichungen der Formel 10,
- Ermittlung der Trägheitsmomente I_u, I_v und I_{uv} und den Winkel β der Hauptachsen u, v nach den Gleichungen der Formel 11.
- Berechnung des Trägheitsradius i

CALC berechnet folgende Ergebnisse und gibt sie in Variablen aus:

Variable	Ergebnisse
A	Querschnittsfläche
xs, ys	Schwerpunktabstand von den Achsen *x* und *y*
Ix	Trägheitsmoment bezogen auf die *x*-Achse
Iy	Trägheitsmoment bezogen auf die *y*-Achse
Ixy	Zentrifugalmoment bezogen auf den Koordinatenursprung
Ixs	Trägheitsmoment bezogen auf die Schwerachse *x*' des Querschnitts

Variable	Ergebnisse
Iys	Trägheitsmoment bezogen auf die Schwerachse *y*' des Querschnitts
Ixys	Zentrifugalmoment bezogen auf den Schwerpunkt des Querschnitts
Iu	Trägheitsmoment bezogen auf die Hauptachse *u* des Querschnitts
Iv	Trägheitsmoment bezogen auf die Hauptachse *v* des Querschnitts
ß°	Winkel in Altgrad (°) zwischen Hauptachse *u* und Schwerachse *x*' (positiv = gegen den Uhrzeigersinn)
imin	minimaler Trägheitsradius

4.6 Umfang des Querschnitts

Hier wird nur der Programmieransatz gegeben, wie man Längen rechnet.

Man stellt zuerst mit den Vektoren der Punkte eines offenen oder geschlossenen Streckenzugs eine Liste **STRZUG** (Streckenzug) her, dessen Länge man berechnen möchte. In der Liste muss der Anfangspunkt und der Schlusspunkt enthalten sein.

Achtung:
Wenn man für einen durch die Variable POLYGON gegebenen Querschnitt den Umfang rechnen will, also die Länge der geschlossenen Umfahrungslinie, dann muss man in die schon dafür vorhandene Liste in POLYGON (ohne Schlusspunkt) am Schluss noch den Anfangspunkt von Hand oder durch das Programm

```
« POLYGON DUP HEAD + 'STRZUG' STO »
```

anfügen, dann kann man das untenstehende Programm für den Streckenzug darauf anwenden.

Dabei ist zu beachten, dass bei zusammengesetzten Querschnitten auch die Längen der Verbindungslinen (doppelt) addiert werden.

4.7 Gesamtlänge eines Streckenzugs

```
« STRZUG 2. « - ABS » DOSUBS « + » STREAM »
```

In der Liste STRZUG sind alle gewünschten Eckpunkte einschließlich Anfangs- und Endpunkt enthalten. Das Programm berechnet für jede Teilstrecke die Kantenlänge von Punkt $\mathbf{P}_i$ nach $\mathbf{P}_{i+1}$ durch Vektorsubtraktion. Der Betrag der Vektordifferenz ist der Abstand der beiden Punkte $\mathbf{P}_i$ und $\mathbf{P}_{i+1}$. DOSUBS liefert eine Liste von (***n***-1) Einzellängen (weil zwischen ***n*** Punkten (***n***-1) Zwischenräume sind), die mit STREAM aufaddiert werden. Damit hat man die Gesamtlänge des Streckenzugs von Punkt $\mathbf{P}_1$ bis Punkt $\mathbf{P}_n$.

4.8 Programmsystem QSW für HP-Taschenrechner

Die Bezeichnung **QSW** bedeutet **Q**uer**S**chnitts**W**erte. Das QSW-Programmsystem wird als Menü QSWDIR zur Verfügung gestellt, es ist im Anhang unter 5.4 abgedruckt.

Alle Programme sind komplett in der Benutzer-Programmiersprache des HP (UsrRPL) geschrieben und können von den Anwendern beliebig angepasst werden. Es sind keine zusätzlichen externen Bibliotheken oder Programme nötig.

4.8.1 Systemeinstellungen

Die Programme sichern die ursprünglichen Flageinstellungen des HP mit RCLF und stellen dann folgende Flags richtig ein:

Systemflag	Wert	Bedeutung
-2	1	Zahlenauswertung bei Konstanten
-3	1	Zahlenauswertung bei Funktionen
-19	0	->V2 erstellt Vektor
-20	0	Fehlertolerierung bei Unterlauf
-21	0	Fehlertolerierung bei Überlauf
-22	1	Unendlich = ±MAXR, Division durch null wird toleriert, null durch null wird nicht toleriert, weil unbestimmt.
-31	0	Linienplott
-90	1	Minifont für CHOOSE
-95	0	RPN
-103	1	Complex-Modus
-105	1	Näherungsmodus (reelle Zahlen)
DEG		Winkel auf Altgrad [°] einstellen
RECT		rechtwinkelige Koordinaten xyz auswählen
DEC		dezimale Binärdarstellung #...d auswählen

Nach Programmlauf werden die ursprünglichen Flags wieder zurückgespeichert.

Das Menü **QSWDIR** enthält die in der folgenden Tabelle angegebenen Menüpunkte (Programme und Variablen).

Menüpunkt	Funktion
CPOLY	Anlegen (Create) einer neuen Variablen POLYGON
KOOIN	Eingabe der Koordinatenwerte in POLYGON
AREA	berechnet nur die Gesamtfläche aus POLYGON
CALC	Ermittlung aller Querschnittswerte
RESULTS	zeigt die Ergebnisse in einem Auswahlmenü an.
QPLOT	plottet den vollständigen Querschnitt
QPLO	plottet den Streckenzug der Linien 1 bis ***n***
POLYGON	enthält die Koordinatenpunkte als Vektoren
BILD	zeigt den geplotteten Querschnitt an
QSich	Unterverzeichnis, enthält Sicherungsvariablen und Zusatzprogramme

CPOLY erzeugt ein leere Liste und speichert sie in der Variablen POLYGON ab. Dieser Befehl überschreibt auch ohne Rückfrage eine bestehende Variable POLYGON. Wenn erforderlich ist der bisherige Inhalt dieser Variablen unter einem anderen Namen zu sichern.

Mit **KOOIN** kann ein Polygon-Eckpunkt ***x, y*** als Vektor eingegeben werden. Bei ***n*** Eckpunkten muss man ***n***-mal die jeweiligen Werte für ***x,y*** in den Stack stellen und KOOIN aufrufen.

CPOPY und **KOOIN** sind oben in einem Beispiel erläutert. Aus obigem Beispiel ist bereits eine Liste mit Vektoren in der Variablen POLYGON abgespeichert, die sich auf den Querschnitt in Bild 8 bezieht.

{[3, 5,] [2, 4,] [3, 2,] [8, 3,] [13, 2,] [16, 10,] [13, 9,] [11, 5,] [10, 6,]}

Die Programme **AREA**, **CALC**, **RESULTS** und **QPLOT** enthalten einige wenige Plausibilitätsprüfungen und liefern Fehlermeldungen.

Für die Berechnungen mit diesen Programmen muss die Variable **POLYGON** im Zugriffspfad existieren und mindestens drei Vektoren enthalten, sonst erfolgt Programmabbruch mit entsprechender Fehlermeldung.

Der Aufruf des Programmes **AREA** startet die Flächenberechnung des Querschnitts. Es wird nur der Flächeninhalt ***A*** berechnet. Das Ergebnis wird als Zahl in den Stack gestellt, aber keine Variable erzeugt.

CALC berechnet die 13 Ergebnisvariablen und stellt den Menüpunkt **DEL** an den Anfang des Menüs. DEL ist eine vom Programm erzeugte Löschfunktion, über die man die vom Programm erzeugten Variablen (und auch **DEL** selbst) mit einem Tastendruck auf F1 löschen kann.

Die übrigen Menüpunkte sind Variablen, die mit der jeweils zugeordneten F-Taste in den Stack geholt und weiterverarbeitet werden können.

Bild 14 und Bild 15 zeigen die DEL-Funktion und 11 Variablen (von 13). Zusätzlich ist hier bei jedem Bild die Menüübersicht per Tastaturbefehl auf den Bildschirm geholt worden. Ebenso kann über die zugeordnete F-Taste der Wert in den Stack geholt werden.

Bild 14: DEL und 5 Ergebnisvariablen

Bild 15: 6 weitere Ergebnisvariablen

Das Programm **RESULTS** zeigt die Ergebnisse zusammengefasst als CHOOSE-Menü[4], bei dem man mit den Tasten ▲ und ▼ auf und ab scrollen und dabei den gewünschten Ergebniswert markieren kann. Der schwarze Schiebebalken am rechten Rand zeigt an, welcher Bereich der Werte gerade sichtbar ist. Damit stehen alle Ergebnisse übersichtlich zur Verfügung.

Bild 16: CHOOSE-Menü, oberer Teil

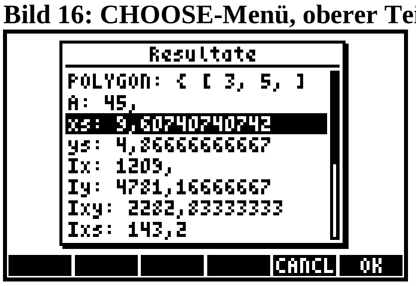
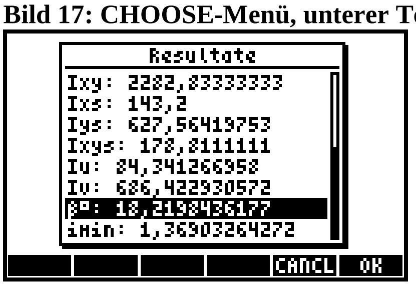


Bild 17: CHOOSE-Menü, unterer Teil



Die Anzahl der Kommastellen kann man für die Anzeige mit **FIX** auf ***n*** Kommastellen einstellen oder die volle Genauigkeit mit **STD** (Standard) wählen. Mit **OK** kann die markierte Zeile in den Stack übernommen werden.

---

[4] Der Name CHOOSE-Menü weist darauf hin, dass durch Scrollen und Markieren eines Wertes dieser Wert ausgewählt und in den Stack geholt werden kann.

Die Werte im CHOOSE-Menü werden als „tagged object“ angegeben, also in der Form ***NAME:WERT***[5]**.** Die Markierung ***NAME*****:** kann mit dem Systembefehl **DTAG** (engl.: *delete TAG*) vom Stack entfernt werden, so dass nur der Wert stehen bleibt. Derselbe Wert steht aber auch in der gleichnamigen Variablen zur Weiterverwendung zur Verfügung.

Das Programm **QPLOT** zeichnet die Querschnittsform auf den Bildschirm (siehe Bild 13). Diese Grafik ist auf der internen Wandtafel PICT des HP gespeichert und kann über den Menüpunkt **BILD** (siehe Bild 10) jederzeit angezeigt werden. Die Grafik in PICT bleibt erhalten, bis ein neuer QPLOT oder QPLO ausgeführt wird. Mit der **[ON]** verlässt man die Grafikanzeige und kehrt zur normalen Stackanzeige zurück.

4.9 Grenzen des Verfahrens

Das Verfahren zur Flächenberechnung kann auch in der Geodäsie und vielen anderen Bereichen Anwendung finden, deshalb wurde AREA als separater Menüpunkt eingebaut.

Das beschriebene Verfahren zur Berechnung der Trägheitsmomente gilt nur für Querschnitte, die aus einheitlichem Material aufgebaut sind.
Bestehen Querschnitte aus mehreren verschiedenen Materialien (z. B. Beton mit Betonstahl oder Spannstahl, Verbundträger aus Beton und Stahlprofilen, Holz mit Stahl), ist das angegebene Verfahren zu modifizieren. Die Berechnungsformeln müssen dann entsprechend ergänzt bzw. geändert werden. Sind die verschiedenen Materialien unverschieblich miteinander verbunden und werden sie nur im elastischen Bereich beansprucht, dann können ideelle Querschnittswerte ermittelt und der Berechnung zugrunde gelegt werden. Dabei wird der Unterschied im elastischen Verhalten der verschiedenen Materialien durch ihre Elastizitätsmoduln ($\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$, ...) oder ihre Verhältnisse zueinander berücksichtigt.

Berechnungen für teilweise gerissene Querschnitte (Zugzone bei Stahlbeton) oder für plastische Materialien können nicht mit den Programmen QSW durchgeführt werden. Hier muss der Statiker die Anwendbarkeit selber prüfen.

[5] ***NAME*** ist eine Bezeichnung, ***WERT*** ist eine relle Zahl.

5 Anhang

5.1 Literaturverzeichnis

Lit.	Autor	Beitrag, Buch
[Fleßner]	*Fleßner, Hermann*	**Ein Beitrag zur Ermittlung von Querschnittswerten mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen,** Zeitschrift „Der Bauingenieur“ 1962, Heft 4, Seiten 146 bis 149, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
[Schweda]	*Schweda/Krings*	**Baustatik, Festigkeitslehre** 1979, Werner Verlag, ISBN 3-8041-3462-9
[MathHb]	*Gellert, Walter*	**Handbuch der Mathematik** 1972, Lizenzausgabe für Buch- und Zeit-Verlagsgesellschaft mbH, Köln
[Bronstein]	*Bronstein,I. N., und Semendjajew, K. A.*	**Taschenbuch der Mathematik** 1989, 24. Auflage, Verlag Harry Deutsch, Thun und Frankfurt/M, ISBN 3-87144-492-8

5.2 Bilderverzeichnis

5.3 Formelverzeichnis

5.4 Quelltext QSWDIR des HP-Programms

```
%%HP: T(3)A(D)F(,);
DIR
  CPOLY
  \<< { } 'POLYGON' STO
  \>>
  KOOIN
  \<< \->V2 POLYGON SWAP + 'POLYGON' STO
  \>>
  AREA
  \<< 'POLYGON' VTYPE
    IF -1, ==
    THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON
  nicht
   gefunden!" MSGBOX
    ELSE POLYGON BYTES SWAP DROP
      IF 90, <
      THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON Fehler!" MSGBOX
      ELSE POLYGON DUP HEAD + 2,
        \<< CROSS 2, /
        \>> DOSUBS
        \<< +
        \>> STREAM V\-> + +
      END
    END
  \>>
  CALC
  \<< RCLF { -20, -20, -21, -31, -95, } CF { -2, -3, -22, -90, -103, -105, } SF DEG
RECT DEC 'POLYGON' VTYPE
    IF -1, ==
    THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD " POLYGON
  nicht
   gefunden!" MSGBOX
    ELSE POLYGON BYTES SWAP DROP
      IF 90, <
      THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON Fehler!" MSGBOX
      ELSE POLYGON DUP HEAD + DUP DUP DUP 2,
        \<< CROSS 2, /
        \>> DOSUBS 1,
        \<< V\-> + +
        \>> DOLIST DUP
        \<< +
        \>> STREAM 'A' STO
        IF A 0, ==
        THEN 2000, ,1 BEEP 1000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP "      A=0!
 Keine
  Berechnung!" MSGBOX DROP DROP DROP DROP 'A' PURGE
        ELSE A
          IF 0, <
          THEN 2000, ,1 BEEP 1000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP "Umlaufsinn
 nicht positiv!
Werte negativ!" MSGBOX
          END SWAP 2,
          \<< + 3, /
          \>> DOSUBS
          \<< *
          \>> DOLIST
          \<< +
          \>> STREAM A / V\-> 'ys' STO 'xs' STO 2,
          \<< V\-> ROT V\-> \-> x2 y2 x1 y1
            \<< y1 y2 + SQ y1 y2 * - x1 y2 * x2 y1 * - *
            \>>
          \>> DOSUBS
```

```
          \<< +
          \>> STREAM 12, / DUP 'Ix' STO A ys SQ * - 'Ixs' STO DUP 2,
          \<< V\-> ROT V\-> \-> x2 y2 x1 y1
            \<< x1 x2 + SQ x1 x2 * - x1 y2 * x2 y1 * - *
            \>>
          \>> DOSUBS
          \<< +
          \>> STREAM 12, / DUP 'Iy' STO A xs SQ * - 'Iys' STO 2,
          \<< V\-> ROT V\-> \-> x2 y2 x1 y1
            \<< x1 x2 + y1 y2 + * x1 y2 * x2 y1 * + 2, / - x1 y2 * x2 y1 * - *
            \>>
          \>> DOSUBS
          \<< +
          \>> STREAM 12, / DUP 'Ixy' STO A xs ys * * - 'Ixys' STO
          IF Ixys 0, ==
          THEN 0,
          ELSE 2, Ixys * Iys Ixs - / ATAN 2, /
          END '\Gb\^o' STO Ixs Iys - 2, / \Gb\^o 2, * COS * Ixys \Gb\^o 2, * SIN *
-
DUP Ixs Iys + 2, / + 'Iu' STO Ixs Iys + 2, / SWAP - 'Iv' STO Iv ABS Iu ABS
          IF <
          THEN Iv ABS A ABS / \v/
          ELSE Iu ABS A ABS / \v/
          END 'imin' STO
          \<< { DEL A xs ys Ix Iy Ixy Ixs Iys Ixys Iv Iu \Gb\^o imin } PURGE
          \>> 'DEL' STO { DEL A xs ys Ix Iy Ixy Ixs Iys Ixys Iu Iv \Gb\^o imin }
ORDER
        END
      END
    END STOF
  \>>
  RESULTS
  \<< RCLF 'Flagsave' STO { -20, -20, -21, -31, -95, } CF { -2, -3, -22, -90, -103,
-105, } SF DEG RECT DEC
    \<< { POLYGON A xs ys Ix Iy Ixy Ixs Iys Ixys Iu Iv \Gb\^o imin } DUP VTYPE SORT
HEAD
      IF -1, ==
      THEN CLLCD 1000, ,1 BEEP "Keine
  Variablen!" MSGBOX "    Keine Werte!"
      ELSE "       Resultate"
      END
    \>> EVAL CLLCD SWAP DUP
    \<< EVAL
    \>> DOLIST SWAP
    \<< \->TAG
    \>> DOLIST 1, CHOOSE DROP Flagsave STOF 'Flagsave' PURGE
  \>>
  QPLOT
  \<< 'POLYGON' VTYPE
    IF -1, ==
    THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON
  nicht
   gefunden!" MSGBOX
    ELSE POLYGON BYTES SWAP DROP
      IF 62, <
      THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON Fehler!
Kein Dreieck!" MSGBOX
      ELSE POLYGON 1,
        \<< V\-> DROP
        \>> DOSUBS SORT DUP HEAD SWAP REVLIST HEAD POLYGON 1,
        \<< V\-> SWAP DROP
        \>> DOSUBS SORT DUP HEAD SWAP REVLIST HEAD ROT SWAP \->V2 'Vmax' STO \->V2
'Vmin' STO Vmax Vmin - ABS
        IF 0, ==
        THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP "Plotten des
 POLYGONs
  nicht
   m\246glich!" CLLCD MSGBOX { Vmin Vmax } PURGE
        ELSE Vmax Vmin - V\-> \-> xd yd
          \<< xd yd / ABS 122, 55, /
```

```
            IF >
            THEN xd ABS 12,2 /
            ELSE yd ABS 5,5 /
            END
          \>> Vmax Vmin + 2, / POLYGON SWAP - SWAP / ERASE { # 0d # 0d } PVIEW PICT
{ # 2d # 2d } "QSW" 1, \->GROB REPL DUP HEAD + 2,
          \<< V\-> R\->C SWAP V\-> R\->C SWAP LINE
          \>> DOSUBS 7, FREEZE { PPAR Vmin Vmax } PURGE
        END
      END
    END
  \>>
  QPLO
  \<< 'POLYGON' VTYPE
    IF -1, ==
    THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON
  nicht
   gefunden!" MSGBOX
    ELSE POLYGON BYTES SWAP DROP
      IF 62, <
      THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP CLLCD "POLYGON Fehler!
Kein Dreieck!" MSGBOX
      ELSE POLYGON 1,
        \<< V\-> DROP
        \>> DOSUBS SORT DUP HEAD SWAP REVLIST HEAD POLYGON 1,
        \<< V\-> SWAP DROP
        \>> DOSUBS SORT DUP HEAD SWAP REVLIST HEAD ROT SWAP \->V2 'Vmax' STO \->V2
'Vmin' STO Vmax Vmin - ABS
        IF 0, ==
        THEN 3000, ,1 BEEP 2000, ,1 BEEP 3000, ,1 BEEP "Plotten des
 POLYGONs
  nicht
   m\246glich!" CLLCD MSGBOX { Vmin Vmax } PURGE
        ELSE Vmax Vmin - V\-> \-> xd yd
          \<< xd yd / ABS 122, 55, /
            IF >
            THEN xd ABS 12,2 /
            ELSE yd ABS 5,5 /
            END
          \>> Vmax Vmin + 2, / POLYGON SWAP - SWAP / ERASE { # 0d # 0d } PVIEW PICT
{ # 2d # 2d } "QSW" 1, \->GROB REPL 2,
          \<< V\-> R\->C SWAP V\-> R\->C SWAP LINE
          \>> DOSUBS 7, FREEZE { PPAR Vmin Vmax } PURGE
        END
      END
    END
  \>>
  POLYGON { }
  BILD
  \<< { } PVIEW
  \>>
@Unterverzeichnis
  QSich
  DIR
    POLYGON { [ 3, 5, ] [ 2, 4, ] [ 3, 2, ] [ 8, 3, ] [ 13, 2, ] [ 16, 10, ] [ 13,
9, ] [ 11, 5, ] [ 10, 6, ] }
    UMFKOO
    \<< POLYGON DUP HEAD + 'STRZUG' STO
    \>>
    UMFANG
    \<< STRZUG 2,
      \<< - ABS
      \>> DOSUBS
      \<< +
      \>> STREAM
    \>>
  END
END
```

5.5 Sachverzeichnis (Index)