

Otto Praxl

Berechnung eines Flüssigkeitsstrahls

*Ein Verfahren zur Berechnung der Durchflussmenge ganz ohne Hydraulikformeln,
nicht nur für Bauingenieure.*

Impressum

Verfasser:

Otto Praxl.

Internetseite:

www.praxelius.de

Urheberrecht:

Das Dokument ist urheberrechtlich geschützt (Urheberrechtsgesetz UrhG vom 9. September 1965 in der Fassung vom 13. September 2003).

Jede Verwertung außerhalb der gesetzlich zugelassenen Fälle bedarf einer vorherigen schriftlichen Vereinbarung mit dem Verfasser. Jede widerrechtliche Nutzung wäre ein Verstoß gegen das Urheberrechtsgesetz, der gerichtlich verfolgt werden kann.

Alle Werknutzungsrechte liegen beim Verfasser. Alle Rechte vorbehalten!

Veröffentlichung

Das Dokument wird als verschlüsseltes PDF-Dokument auf der Homepage www.praxelius.de veröffentlicht. Es darf nicht außerhalb dieser Homepage veröffentlicht werden.

Layout und Gestaltung (mit Microsoft WORD™ 2007):

Otto Praxl

Für das Lesen mit einem PDF-Reader wurden alle Übersichten, Verzeichnisse und die Querverweise im Text mit Hyperlinks unterlegt, die nach Mausklick zur gewünschten Stelle im Text verzweigen und nach Klick auf die Schaltfläche „Zurück zur vorigen Seitenansicht“ wieder zur ursprünglichen Stelle im Text zurückführen.

Rechtschreibung:

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.

Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

Haftungsausschluss:

Im Text und in den Grafiken können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

Bildnachweise:

Alle Zeichnungen stammen vom Verfasser.

Letztes Bearbeitungsdatum: 10.06.2011

Bearbeitungskennzeichen: Str-13439-003

Inhaltsverzeichnis

Das Problem	4
1 Die Lösung	4
1.1 Lösungsansatz	4
1.2 Randbedingungen.....	5
1.3 Messung und Berechnung des Strahls.....	5
1.3.1 Erläuterung der Formelzeichen	5
1.3.2 Die Formeln	6
2 Herleitung der allgemeinen Formel	7
2.1 Positiver Austrittswinkel α	7
2.2 Negativer Austrittswinkel α	8
2.3 Beliebiger Austrittswinkel α	10
3 Anwendbarkeit des Verfahrens.....	10
3.1 Grenzen des Verfahrens	10
3.2 Vorteile.....	10
3.3 Nachteile.....	10
3.4 Brauchbarkeit	11
4 Experiment	11
5 Sachverzeichnis (Index)	12

Das Problem

Auf Baustellen müssen Ingenieure oft folgendes Problem lösen:

Durch ein Rohr (oder Gerinne) fließt pro Zeiteinheit eine bestimmte Menge einer Flüssigkeit. Das Rohr endet frei, wo die Flüssigkeit austritt und in einem bogenförmigen Strahl (Ausflussstrahl) auf den Boden (oder in eine Auffangvorrichtung) fließt.

Die hydraulischen Kennwerte des Rohres (Fließgeschwindigkeit, Druck, Rauigkeitswert der benetzten Wandungen, Viskosität der Flüssigkeit) sind nicht bekannt.

Der Ingenieur auf der Baustelle soll annähernd angeben können, welche Durchflussmenge (= Flüssigkeitsvolumen pro Zeiteinheit = Volumenstrom) durch das Rohr fließt, um z. B. die tatsächliche Leistung einer Pumpe oder die Schüttung einer neuen Quelle zu ermitteln.

Das nachfolgend beschriebene Verfahren wurde vom Verfasser entwickelt und in der beruflichen Praxis erprobt.

1 Die Lösung

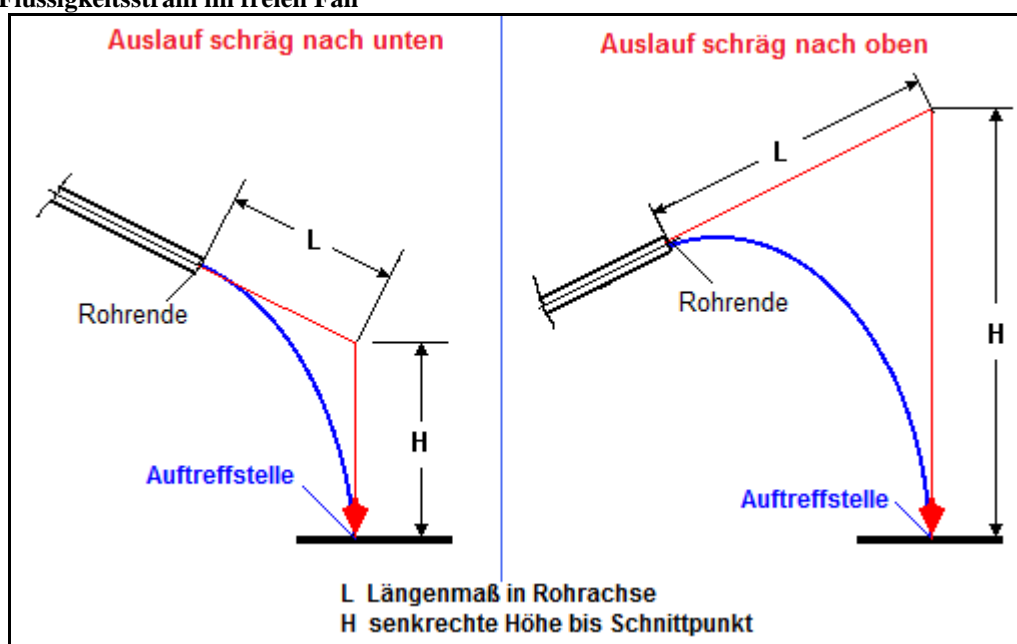
1.1 Lösungsansatz

Da die Flüssigkeit am Rohrende zu 100 % das Rohr verlässt und in den Strahl übergeht, sind alle Flüssigkeitsteilchen ab diesem Zeitpunkt nur dem freien Fall (Erdbeschleunigung) unterworfen. Es ist unerheblich, welche Verhältnisse vorher im Rohr geherrscht hatten, welche Kennwerte und welchen Querschnitt das Rohr hat, es kommt nur auf die Austrittsgeschwindigkeit und auf den Flüssigkeitsquerschnitt am Rohrende (Austrittsquerschnitt) an.

Wenn die Austrittsgeschwindigkeit v in m/s und der Flüssigkeitsquerschnitt A in m^2 (Vollquerschnitt oder Teilfüllung des Rohres) am Rohrende gemessen oder berechnet werden können, dann ist das Problem gelöst.

Bild 1 zeigt den Sachverhalt für Auslaufrichtung schräg nach unten und schräg nach oben.

Bild 1: Flüssigkeitsstrahl im freien Fall



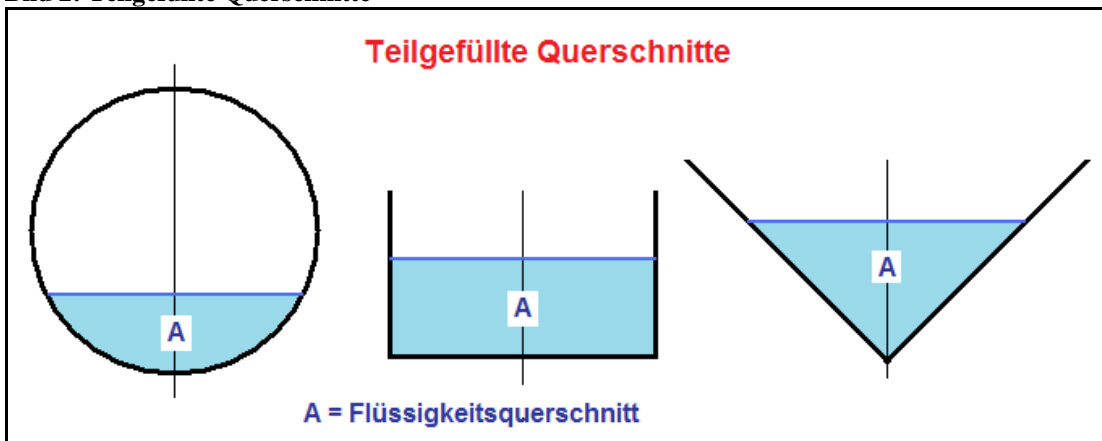
1.2 Randbedingungen

1. Der frei fallende Strahl soll einigermaßen geschlossen sein (nicht sprühen und nicht spritzen), so dass sein Auftreffpunkt am Boden (Zentrum der Auftreff-Fläche) bestimmt werden kann.
2. Die Fließgeschwindigkeit im Rohr soll sich im Messzeitraum nicht ändern.
3. Der Flüssigkeitsquerschnitt am Rohrende (Austrittsquerschnitt) soll durch Messung bestimmt werden können (Zugänglichkeit bzw. Messbarkeit).
4. Der Luftwiderstand des Strahls soll vernachlässigt werden.
5. Messung bei Windstille.

1.3 Messung und Berechnung des Strahls

1. Man lässt einen Senkel (Senkblei, Senklot) auf das Zentrum der Auftreffstelle des Strahls hinunter. Die senkrechte Senkelschnur (rote Linie in der Skizze) wird am Schnittpunkt mit der Verlängerung der Rohrachse geknickt und straff bis zur Austrittsöffnung des Rohres (Rohrende) geführt. Beide Maße H und L werden an der Senkelschnur markiert und später gemessen.
2. Beim Messvorgang wird das Senkelgewicht unten durch geeignete Maßnahmen gegen „Wegspülen“ aus der Senkrechten gesichert oder man misst parallel zur Strahlebene dicht neben dem Strahl.
3. Aus beiden Maßen H und L wird die Austrittsgeschwindigkeit v in m/s nach der unten angegebenen Formel 1 berechnet.
4. Der Austrittsquerschnitt rechtwinklig zur Fließrichtung muss möglichst genau bestimmt werden. Bei volllaufenden (Druck-)Rohren berechnet man den gesamten lichten Rohrquerschnitt, bei teilgefüllten kreisrunden Rohren kann man Fläche des Kreis-segments berechnen, bei anderen Querschnitten (rechteckige oder trapezförmige Rinnen) misst man die entsprechenden Maße des Flüssigkeitsquerschnitts. Daraus berechnet man den Flüssigkeitsquerschnitt A in $[m^2]$ rechtwinklig zur Fließrichtung (Bild 2).

Bild 2: Teilgefüllte Querschnitte



Die Durchflussmenge (Volumenstrom) Q in $[m^3/s]$ wird aus v und A nach Formel 2 berechnet. Formeln für die Berechnung des Querschnitts teilgefüllter Rohre und anderer Profile findet man in jeder Hydraulik-Formelsammlung.

1.3.1 Erläuterung der Formelzeichen

Tabelle 1: Formelzeichen in den nachfolgenden Bildern und Formeln

Formelzeichen	Maßeinheit	Erläuterung
α	$^\circ$ (Altgrad)	Winkel der Rohrachse zur Waagrechten, positiv nach oben, negativ nach unten
h	m	senkrechte Höhe der Austrittsöffnung über dem Auftreffpunkt

Formelzeichen	Maßeinheit	Erläuterung
l	m	waagrechter Abstand des Auftreffpunktes von der Austrittsöffnung
t	s	Zeitdauer des Strahls von Austrittsöffnung bis Auftreffpunkt
t_1	s	Zeitdauer der Aufwärtsbewegung des Strahls
t_2	s	Zeitdauer der Abwärtsbewegung des Strahls
L	m	Längenmaß vom Austrittspunkt in Richtung der Rohrachse bis zum Schnittpunkt mit dem Lot zum Auftreffpunkt
H	m	Länge des Lotes vom Schnittpunkt mit der Rohrachse bis zum Auftreffpunkt
A	m ²	Flüssigkeitsquerschnitt am Rohrende (Austrittsquerschnitt)
g	m/s ²	Fallbeschleunigung auf der Erdoberfläche $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (ortsabhängige Konstante)
v	m/s	Austrittsgeschwindigkeit am Rohrende
Q	m ³ /s	Durchflussmenge = Volumenstrom

1.3.2 Die Formeln

Die Herleitung nachfolgender Formel 1 für v wird über die Fallgesetze (gleichmäßig beschleunigte Bewegung) durchgeführt. Die Formel wird vorerst für eine waagrechte Rohrachse hergeleitet (L wird hier waagrecht gemessen).

Herleitung:

Die Zeit t , die ein Flüssigkeitsteilchen bei senkrechter Bewegung vom Rohrende bis zum Auftreffpunkt braucht, wird aus $H = g \frac{t^2}{2}$ berechnet: $t = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{g}}$. In dieser Zeit t fliegt das

Flüssigkeitsteilchen gleichzeitig mit der Geschwindigkeit v in waagrechter Richtung die Strecke $L = v \cdot t$. Einsetzen des Ausdrucks für t und entsprechende Umstellung nach v ergibt dann die Formel 1.

Formeln für Austrittsgeschwindigkeit v und Durchflussmenge Q :

Formel 1: Austrittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{L}{t} = L \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \cdot H}}$$

Formel 2: Durchflussmenge

$$Q = v \cdot A$$

Formel 2 ist allgemein bekannt und wird hier nicht hergeleitet.

Wie sich durch eine mathematische Nachprüfung in Kapitel 2 ergibt, gilt Formel 1 auch für geneigte Rohrachsen (siehe Bild 1). Der Winkel der Rohrachse zur Waagrechten muss nicht gemessen werden. Der Winkel wird implizit durch die Maße H und L berücksichtigt, die jeweils vom Winkel der Rohrachse abhängig sind.

2 Herleitung der allgemeinen Formel

Die Menge der frei aus einem Rohr ausfließenden Flüssigkeit pro Zeiteinheit kann aus der Austrittsgeschwindigkeit und dem Flüssigkeitsquerschnitt nach Formel 2 $Q = v \cdot A$ ermittelt werden, wobei Q die austretende Menge in $[m^3/s]$, v die Austrittsgeschwindigkeit in $[m/s]$ und A der Flüssigkeitsquerschnitt in $[m^2]$ bedeuten.

Die Austrittsgeschwindigkeit verursacht die Strahlweite l und damit den Auftreffpunkt auf den Boden. Über die Fallgesetze kann aus der Strahlweite l , der Austrittshöhe h und dem Austrittswinkel α der Flüssigkeit die Austrittsgeschwindigkeit v berechnet werden. Der Luftwiderstand des Flüssigkeitsstrahls wird vernachlässigt.

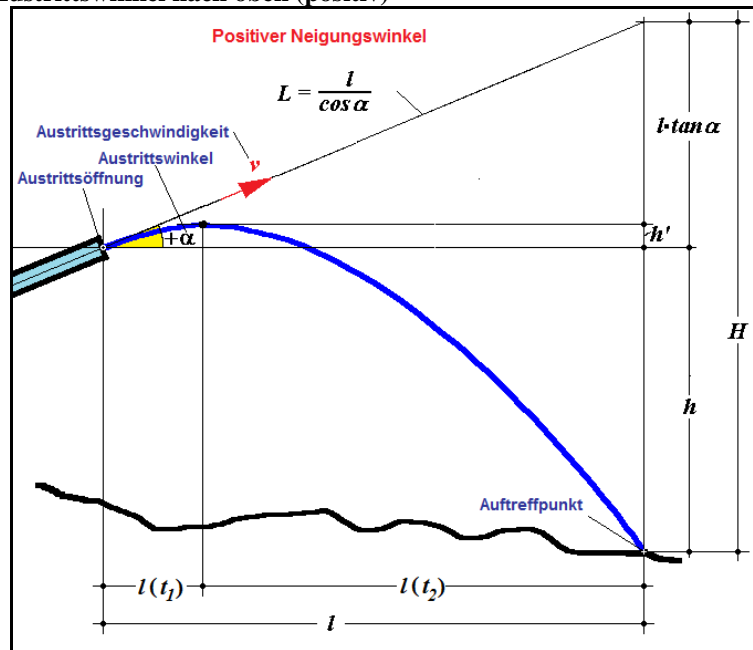
Es werden die Fälle für positiven und negativen Winkel α untersucht und eine einheitliche Formel unter Eliminierung des Winkels entwickelt.

2.1 Positiver Austrittswinkel α

In Fall eines positiven Austrittswinkels ist der Flüssigkeitsquerschnitt immer der volle Querschnitt des Rohres, weil die Flüssigkeit bis zum Austrittspunkt unter Druck steht.

Für die Berechnung zählt nur der Flüssigkeitsquerschnitt und die Austrittsgeschwindigkeit.

Bild 3: Strahl mit Austrittswinkel nach oben (positiv)



Herleitung nach Bild 3:

$$(1) \quad l = l(t_1) + l(t_2) = (t_1 + t_2) \cdot v \cdot \cos(\alpha); \quad t_1 = v \cdot \frac{\sin(\alpha)}{g}; \quad h' = v^2 \cdot \frac{\sin^2(\alpha)}{2g};$$

$$(2) \quad h + h' = \frac{g}{2} \cdot t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot (h + h')} = \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \left(h + \frac{v^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} \right)};$$

$$(3) \quad l = (t_1 + t_2) \cdot v \cdot \cos(\alpha) = v \cdot \cos(\alpha) \cdot \left[\frac{v \cdot \sin(\alpha)}{g} + \sqrt{\frac{2}{g} \cdot \left(h + \frac{v^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{2g} \right)} \right];$$

$$(4) \quad l = \frac{v^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{g} + v \cdot \cos(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{2hg}{g^2} + \frac{v^2 \cdot \sin^2(\alpha)}{g^2}};$$

$$(5) \quad l = \frac{v^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{g} + \frac{v \cdot \cos(\alpha)}{g} \cdot \sqrt{2hg + v^2 \cdot \sin^2(\alpha)};$$

$$(6) \quad \frac{g \cdot l}{\cos(\alpha)} = v^2 \cdot \sin(\alpha) + v \cdot \sqrt{2hg + v^2 \cdot \sin^2(\alpha)};$$

$$(7) \quad \frac{g \cdot l}{\cos(\alpha)} - v^2 \cdot \sin(\alpha) = v \cdot \sqrt{2hg + v^2 \cdot \sin^2(\alpha)};$$

diese Gleichung (7) wird quadriert, daraus folgt:

$$(8) \quad \frac{g^2 \cdot l^2}{\cos^2(\alpha)} - 2 \cdot \frac{g \cdot l}{\cos(\alpha)} \cdot v^2 \cdot \sin(\alpha) + v^4 \cdot \sin^2(\alpha) = v^2 \cdot (2gh + v^2 \cdot \sin^2(\alpha));$$

$$(9) \quad \frac{g^2 \cdot l^2}{\cos^2(\alpha)} = 2 \cdot \frac{g \cdot l}{\cos(\alpha)} \cdot v^2 \cdot \sin(\alpha) - v^4 \cdot \sin^2(\alpha) + v^2 \cdot 2gh + v^4 \cdot \sin^2(\alpha);$$

$$(10) \quad \frac{g^2 \cdot l^2}{\cos^2(\alpha)} = v^2 \cdot \left(2gl \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} + 2gh \right);$$

$$(11) \quad \frac{g^2 \cdot l^2}{\cos^2(\alpha)} = v^2 \cdot 2g \cdot (h + l \cdot \tan(\alpha));$$

$$(12) \quad \frac{g \cdot l}{\cos(\alpha)} = v \cdot \sqrt{2g \cdot (h + l \cdot \tan(\alpha))}.$$

Umstellung der Gleichung (12) nach v :

$$(13) \quad v = \frac{l}{\cos(\alpha)} \cdot \frac{g}{\sqrt{2g \cdot (h + l \cdot \tan(\alpha))}};$$

$$(14) \quad v = \frac{l}{\cos(\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{h + l \cdot \tan(\alpha)}}.$$

Aus Bild 3 ergibt sich: $L = \frac{l}{\cos(\alpha)}$ und $H = h + l \cdot \tan(\alpha)$.

Daraus folgt die endgültige Gleichung (15):

$$(15) \quad v = L \cdot \sqrt{\frac{g}{2H}}, \text{ die mit Formel 1 identisch ist.}$$

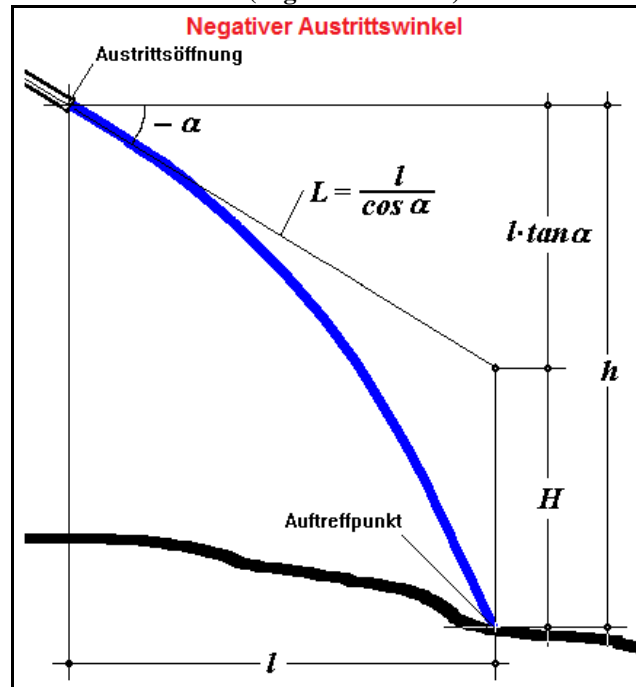
2.2 Negativer Austrittswinkel α

Im Falle eines negativen Austrittswinkels kann der Flüssigkeitsquerschnitt

1. eine Teilfüllung des Querschnitts sein, wenn die Flüssigkeit ohne Druck ausläuft, oder
2. der volle Rohrquerschnitt sein, wenn die Flüssigkeit unter Druck austritt.

Für die Berechnung zählt in beiden Fällen nur der Flüssigkeitsquerschnitt und die Austrittsgeschwindigkeit.

Bild 4: Strahl mit Austrittswinkel nach unten (negativer Winkel)



Herleitung nach Bild 4:

$$(16) \quad h + v \cdot \sin(\alpha) \cdot t = \frac{g}{2} \cdot t^2;$$

$$(17) \quad h + v \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{l}{v \cdot \cos(\alpha)} = \frac{g}{2} \cdot \frac{l^2}{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)};$$

$$(18) \quad h + l \cdot \tan(\alpha) = \frac{g}{2} \cdot \frac{l^2}{v^2 \cdot \cos^2(\alpha)};$$

$$(19) \quad v^2 \cdot \cos^2(\alpha) = \frac{g}{2} \cdot \frac{l^2}{h + l \cdot \tan(\alpha)};$$

$$(20) \quad v \cdot \cos(\alpha) = l \cdot \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{h + l \cdot \tan(\alpha)}};$$

$$(21) \quad v = \frac{l}{\cos(\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{h + l \cdot \tan(\alpha)}}; \text{ identisch mit Gleichung (14).}$$

Aus Bild 4 ergibt sich: $L = \frac{l}{\cos(\alpha)}$ und $H = h + l \cdot \tan(\alpha)$.

Daraus folgt die endgültige Gleichung (22):

$$(22) \quad v = L \cdot \sqrt{\frac{g}{2H}}, \text{ die mit Formel 1 identisch ist.}$$

2.3 Beliebiger Austrittswinkel α

Aus den Formelherleitungen ergibt sich für positive und negative Winkel α eine gemeinsame Formel für die Austrittsgeschwindigkeit v und die ausfließende Menge Q pro Zeiteinheit, wobei der Winkel vorzeichenrichtig einzusetzen ist.

Die Gleichung (14) für positive Winkel und Gleichung (21) für negative Winkel sind identisch:

$$(14) \quad v = \frac{l}{\cos(\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{h+l \cdot \tan(\alpha)}};$$

$$(21) \quad v = \frac{l}{\cos(\alpha)} \cdot \sqrt{\frac{g}{2} \cdot \frac{1}{h+l \cdot \tan(\alpha)}};$$

Da sich auch aus Bild 3 und Bild 4 die gleichen Formeln für $L = \frac{l}{\cos(\alpha)}$ und

$H = h + l \cdot \tan(\alpha)$ ergeben und auch die Gleichungen (15) und (22) identisch sind, gilt die Formel 1 der Austrittsgeschwindigkeit v allgemein für alle Austrittswinkel α .

3 Anwendbarkeit des Verfahrens

3.1 Grenzen des Verfahrens

Der Winkel der Rohrachse zur Waagrechten soll nicht zu groß sein (höchstens $\pm 45^\circ$), denn die Maße H und L müssen noch eindeutig messbar sein. Wenn das Rohr senkrecht nach oben oder unten ausmündet, muss man durch geeignete Rohrbögen den Flüssigkeitsstrom so umlenken, dass ein bogenförmiger Ausflussstrahl entsteht, der gemessen werden kann.

Wer nicht mit Dezimalzahlen der angegebenen Maßeinheiten [m], [m/s], [m²] und [m³/s] rechnen will, muss die Werte g , H , L und A einheitlich in der gewünschten Dimension ([dm]- oder [cm]-Basis) in die Formeln eingeben.

3.2 Vorteile

Unabhängig davon, ob die Flüssigkeit unter Druck austritt oder aus einem Freispiegelgerinne kommt, kann die Austrittsgeschwindigkeit eindeutig über die gemessenen Maße H und L ermittelt werden. Außerdem braucht der Winkel des ankommenden Rohres zur Waagrechten nicht gemessen zu werden, die Formel für die Austrittsgeschwindigkeit ist unabhängig von der Neigung des Rohres. Formel 1 und Formel 2 sind so einfach, dass die Ergebnisse mit dem einfachsten Taschenrechner, der Wurzelrechnung beherrscht, berechnet werden können.

Das Verfahren kann bei allen Flüssigkeiten verwendet werden, die nicht zähe fließen.

3.3 Nachteile

Durch den Luftwiderstand des Strahls wird die waagrechte Weite und damit das Maß L kürzer als es ohne Reibung wäre. Man ermittelt also eine gegenüber der Wirklichkeit zu kleine Durchflussmenge. Falls die Durchflussmenge mehr als 5 Liter pro Sekunde ($> 0,005 \text{ m}^3/\text{s}$) beträgt und der Strahlquerschnitt kompakt ist (annähernd Kreisform), dann ist die Masse des Strahls so groß, dass der (normale) Luftwiderstand das Ergebnis nicht merklich beeinflusst. Bei Wind sollte diese Methode nicht angewandt werden.

3.4 Brauchbarkeit

Für Baustellenverhältnisse ergibt sich eine gute Näherung, die für die vorgesehenen Zwecke (Abrechnung von Pumpmengen, Ermittlung der tatsächlichen Pumpenleistung, Quellschüttungen, o. ä.) ausreichend genau ist.

4 Experiment

Die Berechnung nach der Formel 1 ergibt immer dieselbe Geschwindigkeit v , wenn H und L konstant bleiben.

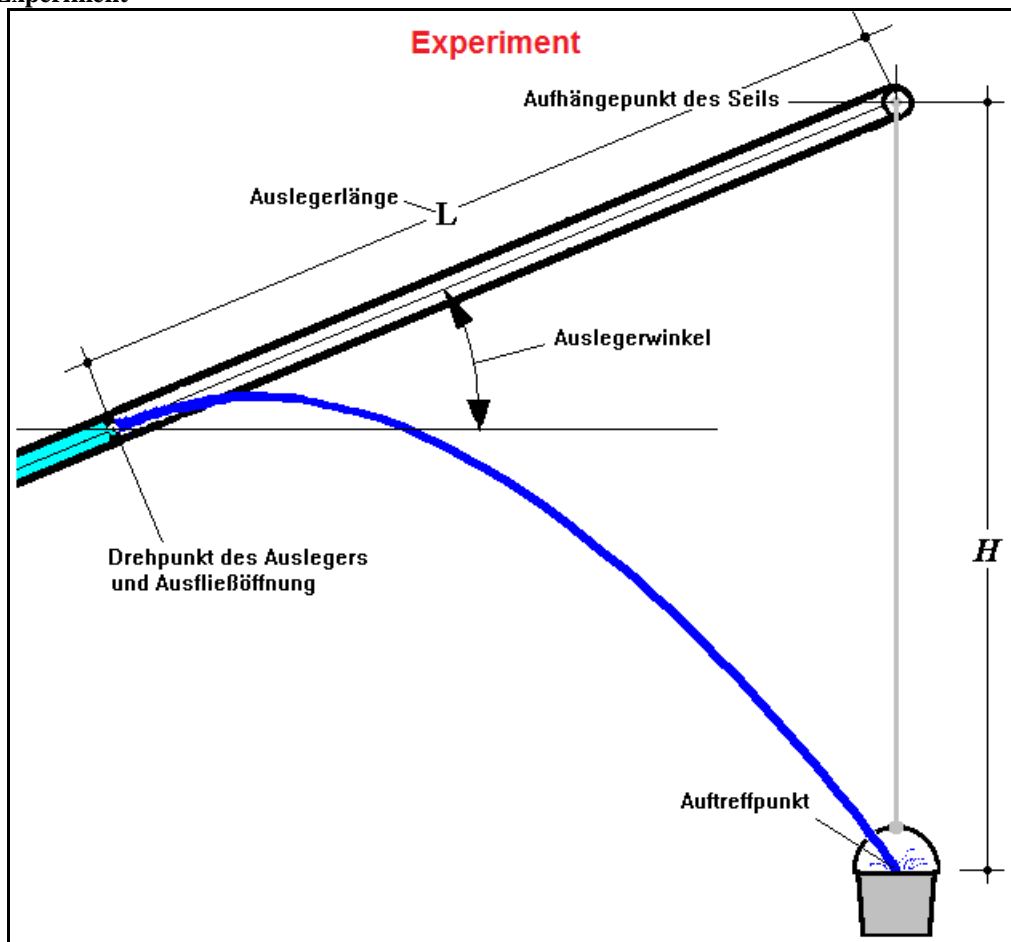
Damit ist folgendes **Experiment** möglich:

In Verlängerung der Ausfließrichtung wird bis zur Länge L ein vertikal schwenkbarer Kran- ausleger angebracht, an dessen Ende ein Seil mit einem Eimer hängt. Die Wasserspiegelebene des Eimers liegt um das Maß H unter der Befestigung des Seils am Ende des Auslegers.

Tritt das Wasser am Drehpunkt des Auslegers parallel zu diesem mit der Geschwindigkeit v aus, so trifft der Strahl genau in den Eimer, gleichgültig, welchen Winkel der Ausleger zur Waagrechten einnimmt.

Nachfolgendes Bild 5 zeigt diesen Sachverhalt.

Bild 5: Experiment



5 Sachverzeichnis (Index)

A

Auftreffstelle	5
Ausflussstrahl	4
Austrittsgeschwindigkeit	4
Austrittsquerschnitt	4

D

Durchflussmenge	4
-----------------------	---

F

Fallgesetze	6
Flüssigkeitsquerschnitt	4

I

Innendurchmesser	5
------------------------	---

K

Kreissegment	5
--------------------	---

L

Luftwiderstand	5, 10
----------------------	-------

R

Rohrachse (Winkel)	10
--------------------------	----

S

Senkblei	5
Senkel	5
Senkelschnur	5
Senklot	5
Strahl, bogenförmig	4
Strahlebene	5

T

teilgefüllt (Rohr)	5
--------------------------	---

V

volllaufend (Rohr)	5
Volumenstrom	4