*Otto Praxl*

# Berechnung der Wurfparabel

*In diesem Beitrag wird die Herleitung der Formeln für die Wurfparabel des schiefen Wurfs ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes gezeigt.*

# Impressum

**Verfasser:**

*Otto Praxl.*

**Internetseite:**

*www.praxelius.de*



**Veröffentlichung**

Das Dokument wird als verschlüsseltes PDF-Dokument auf der Homepage *www.praxelius.de* veröffentlicht. Es darf nicht außerhalb dieser Homepage veröffentlicht werden.

**Layout und Gestaltung** (mit Microsoft WORD™ 2007)**:**

*Otto Praxl*

Für das Lesen mit einem PDF-Reader wurden alle Übersichten, Verzeichnisse und die Querverweise im Text mit Hyperlinks unterlegt, die nach Mausklick zur gewünschten Stelle im Text verzweigen und nach Klick auf die Schaltfläche „Zurück zur vorigen Seitenansicht“ wieder zur ursprünglichen Stelle im Text zurückführen.

**Rechtschreibung:**

Die deutsche Rechtschreibung erfolgt nach den amtlichen Regeln von 2006.
Wenn die Eindeutigkeit einer Aussage es erfordert, wird von diesen Regeln bewusst abgewichen.

**Haftungsausschluss:**

Im Text und in der Grafik können auch Fehler enthalten sein. Für evtl. Fehler und daraus resultierende Nachteile übernimmt der Verfasser keine Haftung.

**Bildnachweise:**

Die Zeichnung stammt vom Verfasser.

**Letztes Bearbeitungsdatum:** 10.06.2011

**Bearbeitungskennzeichen:** W-6527-001

# Inhaltsverzeichnis



---

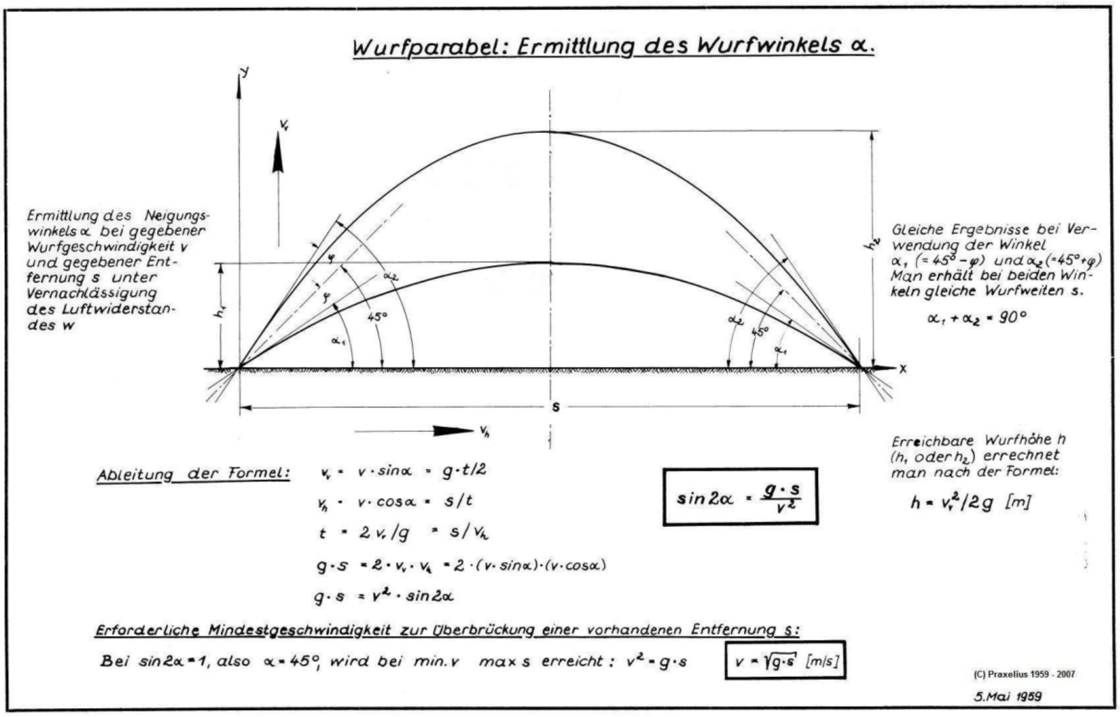
# 1 Die Wurfparabel

Die Gesetze des freien Falls sind nicht nur auf frei im Raum befindliche Flüssigkeitsmengen anwendbar, bei denen die Flugbahn als Strahl sichtbar wird, sondern auch auf einzelne geworfene Gegenstände. Wird der Wurf mit einem Winkel $\alpha$ nach oben gestartet, spricht man in der Physik von einem „schiefen Wurf".

## 1.1 Formeln für die symmetrische Wurfparabel

Bild 1 stammt aus einer Studienarbeit des Verfassers (1959) und zeigt die geometrischen Zusammenhänge und die Herleitung der Formeln.

**Bild 1: Wurfparabel**




Bei der Berechnung des schiefen Wurfs sind zwei Bewegungen zu berücksichtigen: Die gleichförmige waagrechte Bewegung und die gleichmäßig beschleunigte Bewegung des am Anfang der Flugbahn steigenden und am Ende der Flugbahn fallenden Gegenstandes. Während sich der frei im Raum befindliche Gegenstand waagrecht gleichmäßig bewegt, wird die Bewegung in der Höhe von der Schwerkraft beeinflusst, die Geschwindigkeit in der Flugbahn nimmt bei zunehmender Höhe ab und bei abnehmender Höhe zu. Die schräge Anfangsgeschwindigkeit ***v*** wird als Wurfgeschwindigkeit bezeichnet.

Die Formelzeichen in Bild 1 bedeuten:

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{v}$ | Wurfgeschwindigkeit = Anfangsgeschwindigkeit in m/s |
| $\boldsymbol{v}_\mathrm{h}$ | Horizontalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit in m/s |
| $\boldsymbol{v}_\mathrm{v}$ | Vertikalkomponente der Anfangsgeschwindigkeit in m/s |
| $\boldsymbol{t}$ | Zeit (Dauer) des Wurfvorgangs in Sekunden |
| $\boldsymbol{\alpha}$ | Wurfwinkel = Anfangswinkel |
| **g** | = 9,81 m/s$^2$, Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche (ortsabhängige Konstante) |
| $\boldsymbol{s}$ | Wurfweite in m |
| $\boldsymbol{x, y}$ | Rechtwinkeliges Koordinatensystem, Ursprung am Startpunkt des Wurfvorgangs |

Die Funktion $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f(x)}$ der Wurfparabel im rechtwinkeligen Koordinatensystem kann sich jeder, der einige mathematische Grundkenntnisse besitzt, selber aus den angegebenen Größen herleiten.

Beispiel:

Man berechne die „Sprungweite", die ein unter $\boldsymbol{\alpha}$ = 15° (= 26,8 % Steigung) bergauf rasendes Auto bei einer „Abfluggeschwindigkeit" von $\boldsymbol{v}$ = 108 km/h erreicht (*James Bond* lässt grüßen!).

Lösung:

$\boldsymbol{v}$ = 108 km/h = 30 m/s;
**sin(2$\boldsymbol{\alpha}$)** = sin(2 · 15)° = 0,5;
$\boxed{\boldsymbol{s} = \boldsymbol{v}^2 \cdot \frac{\sin(2\boldsymbol{\alpha})}{\boldsymbol{g}}}$ = 30$^2$ ·0,5/9,81 = 45,90 m.

# 1.2 Formel für die einseitig verkürzte Wurfparabel

Die in Bild 1 hergeleiteten Formeln gelten nur für die symmetrische Wurfparabel, bei der die Höhen von Startpunkt und Auftreffpunkt gleich sind (= waagrechtes Gelände).

Bei unterschiedlichen Höhen von Start- und Auftreffpunkt ist die Wurfparabel einseitig verkürzt, die Teile über dem höher gelegenen Endpunkt bleiben aber trotzdem beidseits zum höchsten Punkt symmetrisch. Die Wurfbahn insgesamt bleibt eine mathematische Parabel. Hier sollten wir nicht von einer unsymmetrischen, sondern von einer einseitig verkürzten Wurfparabel sprechen.

Zur Berechnung verwenden wir die im Beitrag „Berechnung eines Flüssigkeitsstrahls" (Datei *Strahl.pdf*) angegebene Formel 1. Sie gilt für jeden Winkel $\boldsymbol{\alpha}$. Sie lautet (nach Quadrierung der Gleichung):

$$\boxed{\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{L}^2 \cdot \frac{\boldsymbol{g}}{2\boldsymbol{H}}}$$

Sie benötigt nur drei Eingabewerte :

1. Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}$,
2. schräge Länge $\boldsymbol{L}$ in Wurfrichtung vom Startpunkt bis zum Schnittpunkt mit dem Lot zum Auftreffpunkt und
3. Höhe $\boldsymbol{H}$ des Lotes von diesem Schnittpunkt bis zum Auftreffpunkt.

Man kann beide Formeln

$\boxed{\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{L}^2 \cdot \frac{\boldsymbol{g}}{2\boldsymbol{H}}}$ aus dem Beitrag „Berechnung eines Flüssigkeitsstrahls" und

$\boxed{\sin(2\alpha) = \frac{g \cdot s}{v^2}}$ aus Bild 1 ineinander überführen:

Setzt man die geometrischen Verhältnisse voraus, wie sie Bild 1 zeigt und setzt:

$\boxed{L = \frac{s}{\cos(\alpha)}}$ und $\boxed{H = L \cdot \sin(\alpha)}$ in $\boxed{v^2 = L^2 \cdot \frac{g}{2H}}$ ein, so erhält man nach einigen Umformungen:

$\boxed{v^2 = \frac{g \cdot s}{\sin(2\alpha)}}$.

# 2 Zusammenfassung

Die (energetisch) günstigste Flugbahn tritt beim Wurfwinkel $\alpha$ = 45° auf. Bei anderen Winkeln muss eine höhere Wurfgeschwindigkeit $v$ gewählt werden, um dieselbe Wurfweite $s$ zu erzielen. Die Wurfweiten für die Winkel $\alpha$ und (90° - $\alpha$) sind gleich.

Im lufterfüllten Raum verringern sich infolge des Luftwiderstandes Wurfhöhe und Wurfweite. Die Wurfbahn ist dann unsymmetrisch, sie ist keine mathematische Parabel mehr, ihr aufsteigender Teil ist schwächer gekrümmt als der fallende Teil, der höchste Punkt liegt nicht in der Mitte zwischen den Endpunkten, sondern liegt näher beim Auftreffpunkt. Der Auftreffwinkel ist größer als der Anfangswinkel $\alpha$.

Den Luftwiderstand wollen wir bei der Berechnung bewusst vernachlässigen. Die Größe des Luftwiderstands hängt vom c-Wert des Gegenstands und vom sich laufend verändernden Geschwindigkeitsvektor ab. Die Geschwindigkeit wiederum wird im Laufe der Flugbahn vom sich verändernden Luftwiderstand beeinflusst. Luftwiderstand und Geschwindigkeit sind gegenseitig voneinander abhängig. Die Formel mit Berücksichtigung des Luftwiderstands wäre wesentlich komplizierter (Differentialgleichung!) als die in der Grafik gezeigte einfache Formel für die Parabel.

Wir merken uns nur, dass die erreichte Wurfweite $s$ bei Berücksichtigung des Luftwiderstands etwas kürzer ist als der mit der einfachen Formel berechnete Wert.